1. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$

$=6x^3+x^2-4x-3$

$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

2. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$$2x^2-3x+1,\quad 3x^2-x-2,\quad x^2+3x-4$$

① $x-1$ ② $2x-1$ ③ $x-2$

④ $x+3$ ⑤ $x+1$

해설

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$

$3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

따라서 최대 공약수는 $x-1$이다.

3. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서
$x^2=t$로 치환하면
$t^2+3t-10=0,\ (t+5)(t-2)=0$
$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p,q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

5. 이차함수 $y=-(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 ,그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$y=-(x-2)(x+6)$
$y=-(x^2+4x-12)$
$y=-(x+2)^2+16$

$x=-2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.
$a=16,\ b=-2$ 이므로 $a+b=14$ 이다.

6. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

7. 삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 α라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2-\alpha+1=0$

② $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=-1$

③ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3=\alpha^2+\overline{\alpha}^2$

④ $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}=2$

⑤ $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=1$

해설

$x^3=-1,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\alpha^3=\overline{\alpha}^3=-1,$

$\alpha^2-\alpha+1=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+1=0$

$\alpha+\overline{\alpha}=1,$

$\alpha\overline{\alpha}=1$

①$\alpha^2+\alpha+1=0(◯)$

②$\alpha+\overline{\alpha}=1(\times)$

③$\alpha^3+\overline{\alpha}^3=-1-1=-2$

$\alpha^2+\overline{\alpha}^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2=-1(\times)$

④$\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}$

$=\dfrac{\alpha+1}{1-\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}$

$=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+1=\dfrac{2}{1-\alpha}(\times)$

⑤$\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2$

$=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})=1(◯)$

8. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\dfrac{400}{3}$m/분

$$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분}=\frac{0.4\,\text{km}}{3}\times 60/\text{시간}=8\,\text{km/h}$$

9. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

10. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a,b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad\ =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0\ (\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

11. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$　② $1\le k\le\frac{5}{4}$　③ $-5<k<-\frac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

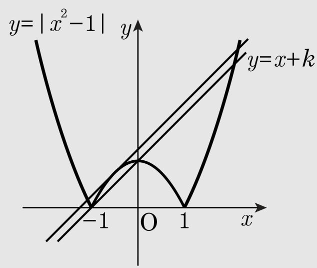
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k,\ y=|x^2-1|,\ \ y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1,\ \ y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0 \qquad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \qquad \therefore\ k>1$

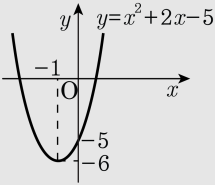
$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

12. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y=|x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

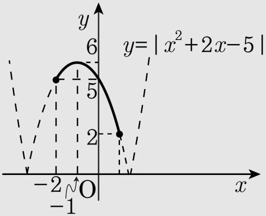
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$ 이므로
$y=x^2+2x-5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y=|x^2+2x-5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y=|x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $y=6$, 최솟값은 $x=1$ 일 때 $y=2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

13. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$

④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6\\
&=(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2\\
&=(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2
\end{aligned}
$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c\\
&=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2
\end{aligned}
$$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

14. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

15. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.
② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다.
④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a(\text{정수})$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$
$$= a^2(\text{정수})$$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b(\text{정수})$

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.