1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다 ② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수 ④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설
$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x + 4)(x - 2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양수가 되려면

판별식이 $D<0$ 이이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-5)^2-2(3a-19)<0$

$a^2-10a+25-6a+38<0$, $a^2-16a+63<0$

$(a-9)(a-7)<0$

$\therefore\ 7<a<9$

따라서 정수a 의 값은 8 이다.

4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ \dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

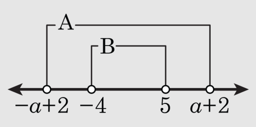
$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

5. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$　② $0 < a < 3$　③ $0 \le a \le 3$
④ $a \ge 3$　⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



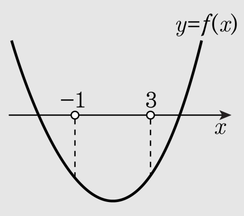
6. $-1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

7. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 $a,\ b$의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b < 25$
② $a = 20,\ 0 < b < 25$
③ $a = 20,\ b > 25$
④ $0 < a < 20,\ b > 25$
⑤ $0 < a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한다
$\Rightarrow \quad x^2 + 2(2y+5) + 4y^2 + ay + b > 0$
항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다
$D' = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$
$\Rightarrow \quad (20-a)y + 25 - b < 0$
임의의 $x,\ y$에 대해 성립하려면, $a = 20, \quad b > 25$

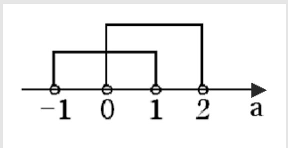
8. $x^2-2ax+1=0$, $x^2-2ax+2a=0$중에서 한 개의 방정식만 허근을 갖도록 양수 a의 범위를 정할 때, $\alpha \le a < \beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{D_1}{4}=a^2-1<0$에서 $-1<a<1$

$\frac{D_2}{4}=a^2-2a<0$에서 $0<a<2$



그림에서 $a>0$이므로 $1 \le a < 2$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=2$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq -1,\ \dfrac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \leq -3,\ \dfrac{2}{3} \leq x < 2$

③ $-2 < x \leq 0,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \leq -2,\ \dfrac{2}{3} \leq x < 1$

⑤ $-4 < x \leq -2,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

해설

$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \cdots ㈎ \\ (x+1)^2 < 4 \cdots ㈏ \end{cases}$

㈎에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$이므로

$x \leq -2$ 또는 $x \geq \dfrac{2}{3}$

㈏에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$이므로

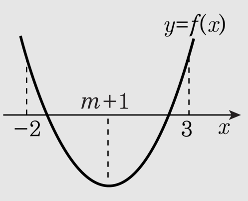
$-3 < x \leq -2,\ \dfrac{2}{3} \leq x < 1$

10. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 2개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

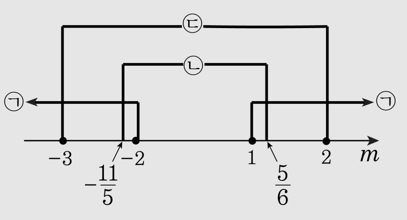
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\frac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\frac{6}{5}$

$\therefore -\frac{11}{5}<m<\frac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\frac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

11. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 2+$ ③ 하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

12. $n-\frac{1}{2} \leq x < n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 x에 대하여 $\{x\}=n$으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2-x-\frac{1}{2}\right\}=3x+1$의 근을 α, β라 하자. 이때, $9\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 13　② -13　③ 15　④ -15　⑤ 17

해설

$3x+1$은 정수이므로

$(3x+1)-\frac{1}{2} \leq x^2-x-\frac{1}{2} < (3x+1)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ 5 \leq x^2-4x+4 < 6$

$\therefore\ 5 \leq (x-2)^2 < 6$

이때, $3x+1$이 정수이므로 $3x$도 정수,

$3x=k$(k는 정수)라 하면 $x=\frac{k}{3}$

$\therefore\ 5 \leq \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$

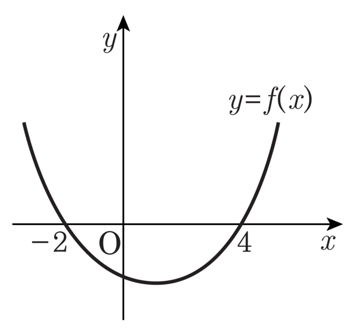
$\therefore\ 45 \leq (k-6)^2 < 54 \quad \therefore\ k=-1,\ 13$

$k=-1$일 때 $x=-\frac{1}{3}$,

$k=13$일 때 $x=\frac{13}{3}$

$\therefore\ 9\alpha\beta=-13$

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-1) > f(2x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는?



① $-2 < x < 0$ ② $-1 < x < 1$ ③ $0 < x < 2$
④ $1 < x < 3$ ⑤ $2 < x < 4$

해설

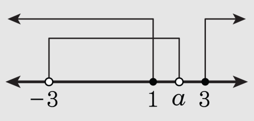
$f(x) = a(x+2)(x-4)$ $(a > 0)$ 로 놓으면
$f(x-1) = a(x+1)(x-5)$
$f(2x) = a(2x+2)(2x-4) = 4a(x+1)(x-2)$
이 때, $f(x-1) > f(2x)$ 에서
$a(x+1)(x-5) > 4a(x+1)(x-2)$
$a(x+1)(x-5-4x+8) > 0$
$a > 0$ 이므로 $(x+1)(-3x+3) > 0$
$3(x+1)(x-1) < 0$
$\therefore \ -1 < x < 1$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ |x-2| \geq 1 \end{cases}$ 의 해가

$-3 < x \leq 1$ 이고, $|a|+|b|=5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설



$|x-2| \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$ 또는 $x \leq 1$

또, 해가 $-3 < x \leq 1$ 이므로

$x^2+ax+b=0$ 의 한 근이

-3 임을 알 수 있다.

따라서, 두 근을 $\alpha, -3$ 이라고 하면

근과 계수의 관계에서

$-a=(\alpha-3)<0 \;\Rightarrow\; a>0 \cdots$ ①

$b=\alpha \times (-3)<0 \cdots$ ②

①, ② 에서 $|a|+|b|=5 \;\Rightarrow\; a-b=5$

$x=-3$ 대입 $9-3a+b=0$

$\Rightarrow a=2,\; b=-3$

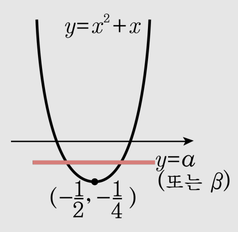
$\therefore \quad a+b=-1$

15. 실계수 사차방정식 $(x^2+x)^2+a(x^2+x)+1=0$의 근이 모두 실수가 되도록 하는 a의 값의 범위는?

① $a \le -\frac{1}{4}$　② $a \ge -\frac{1}{4}$　③ $a \ge 0$
④ $a \le -2$　⑤ $a \ge -2$

해설

$x^2+x=t$ 라 두면 주어진 방정식은
$f(t)=t^2+at+1=0$ ⋯⋯ ㉠
㉠의 근을 α, β라 하면
$x^2+x=\alpha$와
$x^2+x=\beta$
$y=x^2+x$와 $y=\alpha$(또는β) 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



네 근이 모두 실수일 조건은
$\alpha \ge -\frac{1}{4}$ 이고 $\beta \ge -\frac{1}{4}$
이렇게 될 조건은 ㉠에 대하여
$\mathrm{D}=a^2-4 \ge 0$, 대칭축 : $-\frac{a}{2} \ge -\frac{1}{4}$,
$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}-\frac{a}{4}+1 \ge 0$
정리하면 구하는 조건은 $a \le -2$