

1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x - 3)^2 \geq 0$, (실수) $^2 \geq 0$ 이므로

$\therefore$ ⑤ 모든 실수

2. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$$(x + 4)(x - 2) < 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$$

$$\therefore a = -8$$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a - 5)x + 2(3a - 19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$x^2 + 2(a - 5)x + 2(3a - 19)$ 가 양수가 되려면
판별식이 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a - 5)^2 - 2(3a - 19) < 0$$

$$a^2 - 10a + 25 - 6a + 38 < 0, a^2 - 16a + 63 < 0$$

$$(a - 9)(a - 7) < 0$$

$$\therefore 7 < a < 9$$

따라서 정수 a 의 값은 8 이다.

4. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 6

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$$

$f(4x-1)$ 는 $f(x)$ 의 x 대신 $4x-1$ 를 대입한 것과 같으므로

$$f(4x-1) = k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta) = 0 \text{의 근은}$$

$$x = \frac{\alpha+1}{4}, \frac{\beta+1}{4}$$

$$\therefore \text{두 근의 합은 } \frac{\alpha+1+\beta+1}{4} = \frac{6+2}{4} = 2$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$$

$$f(4x-1) = 0 \text{에서}$$

$$4x-1 = \alpha, 4x-1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{4}, x = \frac{\beta+1}{4},$$

$$\therefore \text{두 근의 합은 } \frac{\alpha+1+\beta+1}{4} = \frac{6+2}{4} = 2$$

5. 양의 실수 a 에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$ 의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$ 를 만족할 때, a 값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$

② $0 < a < 3$

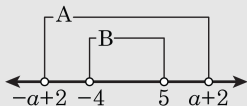
③ $0 \leq a \leq 3$

④ $a \geq 3$

⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore a \geq 6$



6. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

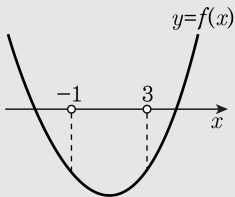
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

7. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b 의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20, b < 25$

② $a = 20, 0 < b < 25$

③ $a = 20, b > 25$

④ $0 < a < 20, b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20, 0 \leq b \leq 25$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리한다

$$\Rightarrow x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$$D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$\Rightarrow (20 - a)y + 25 - b < 0$$

임의의 x, y 에 대해 성립하려면, $a = 20, b > 25$

8. $x^2 - 2ax + 1 = 0$, $x^2 - 2ax + 2a = 0$ 중에서 한 개의 방정식만 허근을 갖도록 양수 a 의 범위를 정할 때, $\alpha \leq a < \beta$ 이다. 이때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

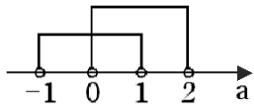
④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 < 0 \text{에서 } -1 < a < 1$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2a < 0 \text{에서 } 0 < a < 2$$



그림에서 $a > 0$ 이므로 $1 \leq a < 2$

$\therefore \alpha = 1, \beta = 2$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq -1, \frac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \leq -3, \frac{2}{3} \leq x < 2$

③ $-2 < x \leq 0, \frac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$

⑤ $-4 < x \leq -2, \frac{1}{3} < x < 1$

해설

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)^2 < 4 \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$ 이므로

$$x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq \frac{2}{3}$$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$ 이므로

$$-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$$

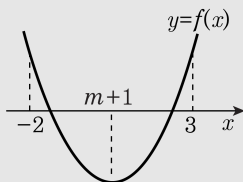
10. 이차방정식 $x^2 - 2(m+1)x + m+3 = 0$ 의 두 실근이 -2 와 3 사이에 있을 때, 정수 m 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

개

▷ 정답 : 2개

해설



$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m+3$ 으로 놓으면

(i) $\frac{D}{4} = (m+1)^2 - (m+3) \geq 0$ 에서

$$(m-1)(m+2) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -2 \text{ 또는 } m \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\Gamma}$$

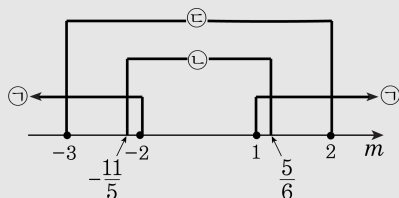
(ii) $f(-2) = 5m+11 > 0$ 에서

$$m > -\frac{11}{5},$$

$f(3) = 6-5m > 0$ 에서 $m < \frac{6}{5}$

$$\therefore -\frac{11}{5} < m < \frac{6}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{L}}$$

(iii) 대칭축의 위치



$$-2 < m+1 < 3$$

$$\therefore -3 < m < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{E}}$$

①, ②, ③에서 $-\frac{11}{5} < m \leq -2$ 또는 $1 \leq m < \frac{6}{5}$

따라서, 정수 m 은 $-2, 1$ 두 개다.

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

① $\times 2 +$ ③ 하면 $6 + 3b > 0$

$$\therefore b > -2$$

이것과 ②에서 $-2 < b < 0$

$$\therefore b = -1 (\because b \text{는 정수})$$

이 값을 ①, ③에 대입하면

$$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$$

$$\therefore a = -1 (\because a \text{는 정수})$$

$$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$$

12. $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$ (단, n 은 정수)인 실수 x 에 대하여 $\{x\} = n$ 으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2 - x - \frac{1}{2}\right\} = 3x + 1$ 의 근을 α, β 라 하자. 이 때, $9\alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① 13

② -13

③ 15

④ -15

⑤ 17

해설

$3x + 1$ 은 정수이므로

$$(3x + 1) - \frac{1}{2} \leq x^2 - x - \frac{1}{2} < (3x + 1) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore 5 \leq x^2 - 4x + 4 < 6$$

$$\therefore 5 \leq (x - 2)^2 < 6$$

이때, $3x + 1$ 이 정수이므로 $3x$ 도 정수,

$$3x = k (k \text{는 정수}) \text{라 하면 } x = \frac{k}{3}$$

$$\therefore 5 \leq \left(\frac{k - 6}{3}\right)^2 < 6$$

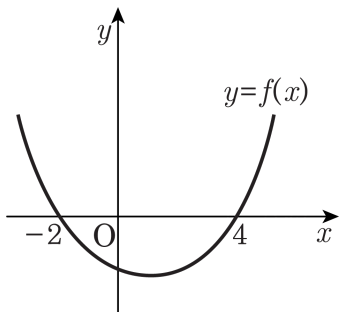
$$\therefore 45 \leq (k - 6)^2 < 54 \quad \therefore k = -1, 13$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } x = -\frac{1}{3},$$

$$k = 13 \text{ 일 때 } x = \frac{13}{3}$$

$$\therefore 9\alpha\beta = -13$$

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-1) > f(2x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는?



① $-2 < x < 0$

② $-1 < x < 1$

③ $0 < x < 2$

④ $1 < x < 3$

⑤ $2 < x < 4$

해설

$f(x) = a(x+2)(x-4)$ ($a > 0$) 로 놓으면

$$f(x-1) = a(x+1)(x-5)$$

$$f(2x) = a(2x+2)(2x-4) = 4a(x+1)(x-2)$$

이 때, $f(x-1) > f(2x)$ 에서

$$a(x+1)(x-5) > 4a(x+1)(x-2)$$

$$a(x+1)(x-5-4x+8) > 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } (x+1)(-3x+3) > 0$$

$$3(x+1)(x-1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 1$$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$ 의 해가

$-3 < x \leq 1$ 이고, $|a| + |b| = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설



$$|x - 2| \geq 1 \Rightarrow x \geq 3 \text{ 또는 } x \leq 1$$

또, 해가 $-3 < x \leq 1$ 이므로

$x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이

-3임을 알 수 있다.

따라서, 두 근을 $\alpha, -3$ 이라고 하면

근과 계수의 관계에서

$$-a = (\alpha - 3) < 0 \Rightarrow a > 0 \dots \textcircled{1}$$

$$b = \alpha \times (-3) < 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } |a| + |b| = 5 \Rightarrow a - b = 5$$

$$x = -3 \text{ 대입 } 9 - 3a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -3$$

$$\therefore a + b = -1$$

15. 실계수 사차방정식 $(x^2 + x)^2 + a(x^2 + x) + 1 = 0$ 의 근이 모두 실수가 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a \leq -\frac{1}{4}$

② $a \geq -\frac{1}{4}$

③ $a \geq 0$

④ $a \leq -2$

⑤ $a \geq -2$

해설

$x^2 + x = t$ 라 두면 주어진 방정식은

$$f(t) = t^2 + at + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 근을 α, β 라 하면

$$x^2 + x = \alpha \text{ 와}$$

$$x^2 + x = \beta$$

$y = x^2 + x$ 와 $y = \alpha$ (또는 β)의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

네 근이 모두 실수일 조건은

$$\alpha \geq -\frac{1}{4} \text{ 이고 } \beta \geq -\frac{1}{4}$$

이렇게 될 조건은 ⑦에 대하여

$$D = a^2 - 4 \geq 0, \text{ 대칭축 : } -\frac{a}{2} \geq -\frac{1}{4},$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} - \frac{a}{4} + 1 \geq 0$$

정리하면 구하는 조건은 $a \leq -2$

