

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 좌표평면 위의 네 점 $A(1, 2)$, $P(0, b)$, $Q(a, 0)$, $B(5, 1)$ 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $A(1, 2)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-1, 2)$, 점 $B(5, 1)$ 의 x 축에 대하여 대칭인 점을 $B'(5, -1)$ 이라 하면

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$$

따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

3. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)가 있을 때, y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되도록 점 P의 y좌표를 구하면?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{5}{4}$

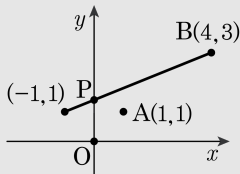
③ $\frac{7}{5}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

구하는 거리의 합의 최솟값은 한 점을 y축에 대칭이동한 점과 다른 점 사이의 거리와 같다. (-1, 1)과 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, y절편을 찾는다.



$$y - 3 = \frac{3 - 1}{4 - (-1)}(x - 4), y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5} + 3$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

P의 y좌표는 $\frac{7}{5}$

4. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x 축 위에 있고, 두 점 A, B의 좌표가 각각 A(-2, 1), B(3, 4)일 때, 점 P의 x 좌표는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$
점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 으로 놓으면

$$\sqrt{(a+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4a + 5 = a^2 - 6a + 25, 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

5. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0)에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$$\therefore a = 2$$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$$