1. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n,m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

2. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

‘명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.’

$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$(참)

$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$(참)

3. 집합 $A = \{x \mid -1 \le x \le 1,\ x\text{는 정수}\}$에 대하여 $a \in A,\ b \in A$일 때, 다음 중 참인 명제는?

① 임의의 a 에 대하여 $a^2 > 0$ 이다.

② $a^2 - 1 = 0$ 을 만족하지 않는 a 가 있다.

③ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족한다.

④ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a + b > 2$ 이다.

⑤ $|a| = |b|$ 이면 $ab = 1$ 이다.

해설

① $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 거짓이다.
② $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 참이다.
③ $a = 1,\ b = 1$ 이면 $a^2 + b^2 = 2$ 이므로 거짓이다.
④ $a = 0,\ b = 0$ 이면 $a + b = 0$ 이므로 거짓이다.
⑤ $a = 1,\ b = -1$ 이면 $|a| = |b| = 1$ 이지만 $ab = -1$ 이므로 거짓이다.

4. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

5. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$ ⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

6. 다음은 명제 '정수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2=z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 x, y, z에 대하여 $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면,
> $x,\ y,\ z$ 는 각각 $x=3l\pm1$, $y=3m\pm1$, $z=3n\pm1$ ($l,\ m,\ n$ 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2 \\ &= 9l^2\pm6l+1+9m^2\pm6m+1 \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l+m)+2 \end{aligned}$$
> 또는
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \text{(나)} \\ &= \text{(다)} \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l-m)+2 \end{aligned}$$
> 한편,
> $z^2=(3n\pm1)^2=9n^2\pm6n+1$
> 따라서, $x^2+y^2\neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2+y^2=z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마)이다.

① (가) $x^2+y^2\neq z^2$

② (나) $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$

③ (다) $9l^2\pm6l+1+9m^2\mp6m+1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

x^2+y^2 는 $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$ 또는 $(3l\pm1)^2+(3m\mp1)^2$

7. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \rightarrow q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(i) $x < 0$이면

$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

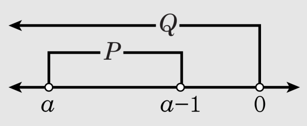
$\therefore\ x + \frac{1}{x} \le -2$

(ii) $x > 0$이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$이므로 Q를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$\therefore\ P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$



따라서, $p \rightarrow q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

8. 네 개의 명제 p, q, r, s가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$
㉢ $\sim s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$	㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s$

① p　② p, q　③ q, r
④ p, q, r　⑤ p, q, r, s

해설

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$
㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
㉢, ㉣에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. ㉠에서 p 가 참이면 q가 참이고 ㉡에서 q 가 참이면 r도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) ㉢에서 대우가 참이므로 s도 참이다.
$\therefore$ p, q, r, s 모두 참이다.