**1.** 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 $n$에 대하여, $n^2$이 짝수이면 $n$도 짝수 이다.

② 자연수 $n$, $m$에 대하여 $n^2+m^2$이 홀수이면, $nm$은 짝수이다.

③ 자연수 $n$에 대하여, $n^2$이 3의 배수이면, $n$은 3의 배수이다.

④ $a$, $b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a$, $b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : $n^2$이 $p$의 배수이면, $n$은 $p$의 배수이다. (참)
② : 대우는 '$nm$ 은 홀수이면 $n^2+m^2$ 이 짝수이다.' $nm$은 홀수, 즉 $n, m$ 모두 홀수이면 $n^2, m^2$ 모두 홀수이므로 $n^2+m^2$은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a$, $b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a\leqq 1$ 그리고 $b\leqq 1$이면 $a+b\leqq 2$ (참)

**2.** $\sim p \to \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \to p$ ② $p \to q$ ③ $\sim p \to \sim q$

④ $\sim p \to q$ ⑤ $p \to \sim q$

**해설**

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'

$\sim p \ \to \ \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \ \to \ \sim p$(참)

$\sim q \ \to \ \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \ \to \ q$(참)

**3.** 집합 $A = \{x \mid -1 \le x \le 1,\ x\text{는 정수}\}$에 대하여 $a \in A,\ b \in A$일 때, 다음 중 참인 명제는?

① 임의의 $a$ 에 대하여 $a^2 > 0$ 이다.

② $a^2 - 1 = 0$ 을 만족하지 않는 $a$ 가 있다.

③ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족한다.

④ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a + b > 2$ 이다.

⑤ $|a| = |b|$ 이면 $ab = 1$ 이다.

해설

① $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 거짓이다.
② $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 참이다.
③ $a = 1,\ b = 1$ 이면 $a^2 + b^2 = 2$ 이므로 거짓이다.
④ $a = 0,\ b = 0$ 이면 $a + b = 0$ 이므로 거짓이다.
⑤ $a = 1,\ b = -1$ 이면 $|a| = |b| = 1$ 이지만 $ab = -1$ 이므로 거짓이다.

**4.** 실수 $x$ 에 대하여 명제 '$ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 $a$ 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$4a + 2a^2 - 6 = 0,\ 2a^2 + 4a - 6 = 0,$
$a^2 + 2a - 3 = 0,\ (a+3)(a-1) = 0$
$\therefore\ a = -3$ 또는 $a = 1$
따라서 $a$ 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

**5.** 세 조건 $p, q, r$의 진리집합을 각각 $P, Q, R$라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$ ⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

**6.** 다음은 명제 '정수 $x$, $y$, $z$에 대하여 $x^2+y^2=z^2$ 이면 $x$, $y$, $z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 $x, y, z$에 대하여 $x$, $y$, $z$가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> $x$, $y$, $z$가 모두 3의 배수가 아니면,
> $x$, $y$, $z$는 각각 $x=3l\pm1$, $y=3m\pm1$, $z=3n\pm1$ ($l$, $m$, $n$은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2 \\ &= 9l^2\pm6l+1+9m^2\pm6m+1 \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l+m)+2 \end{aligned}$$
> 또는
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \text{(나)} \\ &= \text{(다)} \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l-m)+2 \end{aligned}$$
> 한편,
> $z^2=(3n\pm1)^2=9n^2\pm6n+1$
> 따라서, $x^2+y^2\neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2+y^2=z^2$ 이면 $x$, $y$, $z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마)이다.

① (가) $x^2+y^2\neq z^2$

② (나) $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$

③ (다) $9l^2\pm6l+1+9m^2\mp6m+1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

**해설**

$x^2+y^2$는 $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$ 또는 $(3l\pm1)^2+(3m\mp1)^2$

**7.** 두 조건 $p, q$를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \rightarrow q$를 참이 되게하는 실수 $a$의 최댓값을 구하면?

① $-1$　　② $0$　　③ $1$　　④ $2$　　⑤ $3$

해설

( i ) $x < 0$이면

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$$

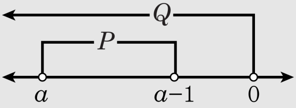
$\therefore \quad x + \frac{1}{x} \le -2$

( ii ) $x > 0$이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$이므로 $Q$를 만족시키지 못한다.

( i ), ( ii )에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$\therefore \quad P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$




따라서, $p \rightarrow q$를 참이 되게 하는 실수 $a$의 최댓값은 $-1$이다.

**8.** 네 개의 명제 $p$, $q$, $r$, $s$가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \to q$가 참일 때 $p \Rightarrow q$로 나타낸다.)

| | |
|---|---|
| ㉠ $p \Rightarrow q$ | ㉡ $\sim r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$ |
| ㉢ $\sim s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$ | ㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s$ |

① $p$ ② $p$, $q$ ③ $q$, $r$

④ $p$, $q$, $r$ ⑤ $p$, $q$, $r$, $s$

해설

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \to \sim q \Leftrightarrow q \to r$ 또는 $\sim p$

㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$

㉢, ㉣에서 $s$가 참이든, 거짓이든 반드시 $p$는 참이다. ㉠에서 $p$가 참이면 $q$가 참이고 ㉡에서 $q$가 참이면 $r$도 참이다. ($\because \sim p$는 거짓) ㉢에서 대우가 참이므로 $s$도 참이다.

$\therefore$ $p$, $q$, $r$, $s$ 모두 참이다.