

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 를 구하여 $x^2 - y^2$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 -12

해설

$$\begin{cases} x - y = 2 & \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 = 20 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $y = x - 2$ 를

㉡식에 대입하면

$$x^2 + (x - 2)^2 = 20, 2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12 \quad \text{또는} \quad x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$ 라 할 때,

다음 중 a 또는 b 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0, x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = 1$

$\therefore y = \pm 1, x = \mp 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

3. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$x, y \text{ 는 실수이므로 } x = -1, y = 2$$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1$$

4. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가진다.
 $-1 \leq a \leq 0$ 일 때 $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots ②$$

$$① - ② : (a - b)(\alpha - 1) = 0 \text{에서}$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = 1$$

$$1 + a + b = 0 \text{에서 } b = -a - 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + (-a - 1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$$

$$= 2 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{이므로 } M = 1, m = \frac{1}{2}$$

5. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

준식을 y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$$x+1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$$

$$5y^2 + 10y + 5 = 0$$

$$5(y+1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x + y = -2$$

6. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x ,

25초 광고의 개수를 y 라 할 때

11개의 광고들 사이의 간격은 $10 \times 1(\text{초}) = 10(\text{초})$

총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270(\text{초})$ 이다.

$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260(\text{초})$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3$, $y = 8$

따라서 20초 광고는 3개이다.

7. 연립방정식 $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ x + y = 3^z \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z 의 합을 구하면?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$x + 3y = 13 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y = 3^z \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 에서 } 2y = 13 - 3^z$$

$$\therefore y = \frac{13 - 3^z}{2} \cdots \textcircled{㉢}$$

$y > 0$ 이므로 $z = 1$ 또는 2

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉠}$ 에 의해서

$$z = 1 \text{ 이면 } y = 5, x = -2$$

$$z = 2 \text{ 이면 } y = 2, x = 7$$

x, y, z 는 양의 정수이므로 $x = 7, y = 2, z = 2$

$$\therefore x + y + z = 11$$