1. 두 점 A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, −1), Q(0, 6)　　② P(3.6, 0), Q(−1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)　　④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(−1, 2)

해설

A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x, 0) 과 Q(0, y)를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \quad \therefore$ P(3.6, 0)

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore$ Q(0, 6)

2. 좌표평면에서 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(5,\ -5)$를 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

해설

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)=(3,\ -2)\text{이다.}$$

점 $(3,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-2=6+k$　$\therefore\ k=-8$

3. 두 점 A$(a, 1)$, B$(3, b)$ 에 대하여 선분 AB를 $3:2$ 로 외분하는 점이 $(1,\ 4)$ 일 때, $a+b$ 를 구하면?

① 6　② 4　③ 3　④ -3　⑤ 5

해설

$(1,4)=\left(\dfrac{3\cdot 3-2\cdot a}{3-2}, \dfrac{3\cdot b-2\cdot 1}{3-2}\right)$

$=(9-2a, 3b-2)=(1,\ 4)$ 이므로

$9-2a=1$, $2a=8$, $a=4$

$3b-2=4$, $3b=6$, $b=2$

$\therefore\ a+b=6$

4. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$
④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore a = 4, b = 2$

5. $\triangle$ABC 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2,\ 5)$, C $(7,\ 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① G$\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$　② G$\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　③ G$\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$
④ G$\left(\frac{8}{3},\ 1\right)$　⑤ G$\left(\frac{8}{3},\ 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2},\ 4\right)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$x = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}$, $y = \dfrac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$

$\therefore\ x = \frac{8}{3},\ y = 2$

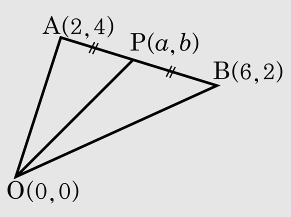
$\therefore$ G$\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

6. 세 점 $O(0,0), A(2,4), B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.



이 때, $P\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$

7. 평면위의 두 점 $\mathrm{A}(m^2, -m)$, $\mathrm{B}(1, m)$ 일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는?

① m^2　　② m^2+1　　③ m^2+2

④ m^2+3　　⑤ m^2+4

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(1-m^2)^2+(m+m)^2}\\ &= \sqrt{m^4+2m^2+1}\\ &= \sqrt{(m^2+1)^2} = m^2+1\end{aligned}$$

8. 점 A(1, 2)와 B(−1, −2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y = 15 \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB} = \overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y = 15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x = -2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

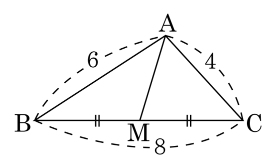
$\therefore\ y^2 = 3$

$\therefore\ y = \pm\sqrt{3}$

따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

9. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

10. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$에서 x축 위의 점 P를 지나 점 B$(5,\ 1)$를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

점 A를 x축에 대해 대칭시키는
새로운 점 A′$(1, -2)$에 대해
선분 A′B의 거리를 구하면 된다.
$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$

11. $\triangle$ABC 에서 변 AB, BC, CA 의 중점이 각각 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 일 때, 점A 의 좌표를$(x_1,\ y_1)$ 이라 할 때, x_1+y_1 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 라 하면

$\frac{x_1+x_2}{2}=-2$ 즉, $x_1+x_2=-4\cdots$ ①

$\frac{x_2+x_3}{2}=3$ 즉, $x_2+x_3=6\cdots$ ②

$\frac{x_1+x_3}{2}=0$ 즉, $x_1+x_3=0\cdots$ ③

① + ② + ③ 하면 $x_1+x_2+x_3=1$

$\therefore\ x_1=-5,\ \ x_2=1,\ \ x_3=5$

$\frac{y_1+y_2}{2}=0$ 즉, $y_1+y_2=0\cdots$ ④

$\frac{y_2+y_3}{2}=1$ 즉, $y_2+y_3=2\cdots$ ⑤

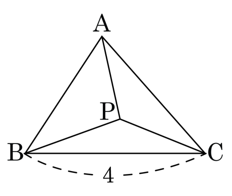
$\frac{y_1+y_3}{2}=3$ 즉, $y_1+y_3=6\cdots$ ⑥

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1+y_2+y_3=4$

$\therefore\ y_1=2,\ \ y_2=-2,\ \ y_3=4$

따라서, $x_1+y_1=-3$

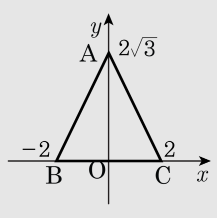
12. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, $\overline{BC}$의 중점을 원점 O, 직선 AO를 y축으로 잡으면 $A\left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$



$P(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$= x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$

$= 3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$

$= 3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은

$x=0, y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

13. 두 점 $A(1,\ 5)$, $B(5,\ 3)$에 대하여 $\overline{AP^2}+\overline{BP^2}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① $(4,\ 5)$ ② $(3,\ 4)$ ③ $(2,\ 3)$
④ $(1,\ 2)$ ⑤ $(0,\ 1)$

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 $P(3,4)$

해설

$P(x,\ y)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

14. 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
정리하면 $12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots$ ①
또, P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots$ ②
①, ② 를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

15. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

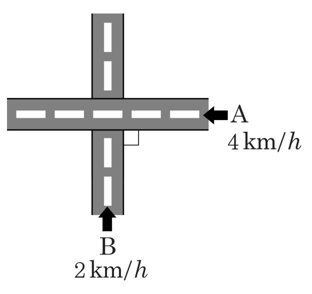
$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3,-2)$

$\therefore\ 3ab = -18$

16. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후　④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, −4) 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2-64t+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$$ 이므로

$t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

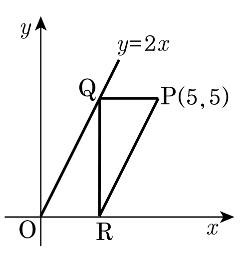
17. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$　　② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$　　④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0 \cdots$ ①
$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3, b=2y-2 \ \cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$

18. 다음 그림에서 점 $\mathrm{P}(5,5)$ 와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?

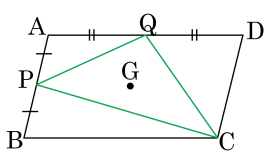


① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}$ 의 최솟값은 P 를 $y=2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{P}''(5,-5)$ 사이 거리와 같다.
$\mathrm{P}'=(a,b)$ 라하면 $\overline{\mathrm{PP}'}$ 은 $y=2x$에 수직이고
$\overline{\mathrm{PP}'}$ 의 중점은 $y=2x$ 위에 있다
$\therefore\ \mathrm{P}'=(1,\ 7)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{PR}}\geq\overline{\mathrm{P}'\mathrm{P}''}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

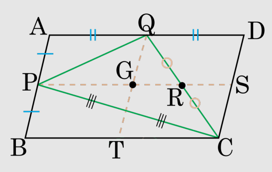
19. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 A(a, b), C(c, d)이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 $(4, 1)$일 때, $a+b+c+d$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

위 그림과 같이 $\overline{PG}$의 연장선이 $\overline{QC}$, $\overline{DC}$와 만나는 점을 각각 R, S라 하고



$\overline{QG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 T라 하면

$\overline{AD} \,/\!/\, \overline{PS}$이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고

$\overline{QT} \,/\!/\, \overline{DC}$이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.

따라서 $\overline{PG} : \overline{GR} = 2 : 1$, $\overline{GR} : \overline{RS} = 1 : 1$이므로 점 G는 선분 PS의 중점이다.

따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$이므로

$\frac{a+c}{2} = 4$, $\frac{b+d}{2} = 1$에서 $a+c=8$, $b+d=2$

$\therefore\ a+b+c+d = 8+2 = 10$