1. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$　　② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$　　④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ Q(0,\ 6)$

2. 좌표평면에서 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(5,\ -5)$를 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)=(3,\ -2)\text{이다.}$$

점 $(3,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-2=6+k\quad \therefore\ k=-8$

3. 두 점 $A(a,1)$, $B(3,b)$ 에 대하여 선분 AB를 3 : 2 로 외분하는 점이 $(1,\ 4)$ 일 때, $a+b$ 를 구하면?

① 6　② 4　③ 3　④ −3　⑤ 5

해설

$$(1,4)=\left(\frac{3\cdot 3-2\cdot a}{3-2},\frac{3\cdot b-2\cdot 1}{3-2}\right)$$

$=(9-2a, 3b-2)=(1,\ 4)$ 이므로

$9-2a=1$, $2a=8$, $a=4$

$3b-2=4$, $3b=6$, $b=2$

$\therefore\ a+b=6$

4. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{\mathrm{AD}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore \ a = 4, \ b = 2$$

5. $\triangle ABC$의 세 꼭짓점의 좌표가 $A(-1,-2)$, $B(2,\ 5)$, $C(7,\ 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $G\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$ ② $G\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ③ $G\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$
④ $G\left(\frac{8}{3},\ 1\right)$ ⑤ $G\left(\frac{8}{3},\ 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2},\ 4\right)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 $G(x,y)$ 라 하면

$$x=\frac{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+3}{3},\ y=\frac{\frac{3}{2}+4+\frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore\ x=\frac{8}{3},\ y=2$$

$$\therefore\ G\left(\frac{8}{3},2\right)$$

6. 세 점 $O(0,0), A(2,4), B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로

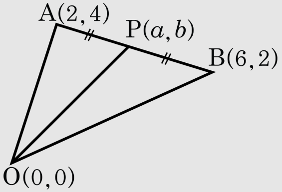
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면

P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



7. 평면위의 두 점 $\mathrm{A}(m^2, -m)$, $\mathrm{B}(1, m)$일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는?

① m^2　　② m^2+1　　③ m^2+2

④ m^2+3　　⑤ m^2+4

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(1-m^2)^2+(m+m)^2}\\ &= \sqrt{m^4+2m^2+1}\\ &= \sqrt{(m^2+1)^2} = m^2+1\end{aligned}$$

8. 점 A(1, 2)와 B(−1, −2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y=15\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}=\overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y=15\cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

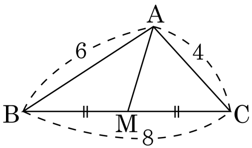
$\therefore\ y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

9. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

10. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$에서 x축 위의 점 P를 지나 점 B$(5,\ 1)$를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3　② 4　③ 5　④ 7　⑤ 8

해설

점 A를 x축에 대해 대칭시키는
새로운 점 A$'(1,-2)$에 대해
선분 A$'$B의 거리를 구하면 된다.
$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$

11. △ABC 에서 변 AB, BC, CA 의 중점이 각각 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 일 때, 점A 의 좌표를$(x_1,\ \ y_1)$ 이라 할 때, x_1+y_1 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 라 하면

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$ 즉, $x_1+x_2=-4\cdots$ ①

$\dfrac{x_2+x_3}{2}=3$ 즉, $x_2+x_3=6\cdots$ ②

$\dfrac{x_1+x_3}{2}=0$ 즉, $x_1+x_3=0\cdots$ ③

① + ② + ③ 하면 $x_1+x_2+x_3=1$

$\therefore\ x_1=-5,\quad x_2=1,\quad x_3=5$

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$ 즉, $y_1+y_2=0\cdots$ ④

$\dfrac{y_2+y_3}{2}=1$ 즉, $y_2+y_3=2\cdots$ ⑤

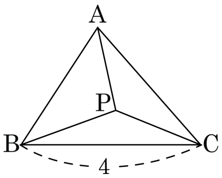
$\dfrac{y_1+y_3}{2}=3$ 즉, $y_1+y_3=6\cdots$ ⑥

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1+y_2+y_3=4$

$\therefore\ y_1=2,\quad y_2=-2,\quad y_3=4$

따라서, $x_1+y_1=-3$

12. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$의 최솟값은?

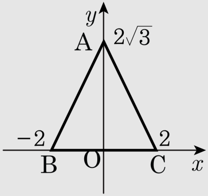


① 16　　② 17　　③ 18

④ 19　　⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{BC}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면
$A\left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$



$P(x, y)$라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$
$$= x^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 + (x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y + 20$$
$$= 3x^2 + 3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 16$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$은

$x = 0, y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

13. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5)　　② (3, 4)　　③ (2, 3)

④ (1, 2)　　⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P$(x,\ y)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad+\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

14. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
정리하면 $12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5 \cdots$ ①
또, P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1 \cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

15. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

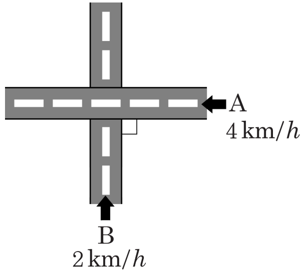
$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C=90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right)=(3,-2)$$

$\therefore\ 3ab=-18$

16. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, −4) 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
$A(6-4t,\ 0)$, $B(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$ 이므로

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

17. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$

② $3x+4y-6=0$

③ $4x-3y-6=0$

④ $3x-4y+6=0$

⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0 \cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면

$$x=\frac{3+a}{2}, y=\frac{2+b}{2}$$

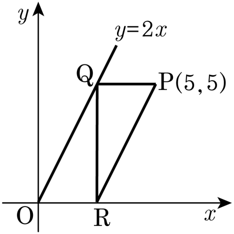
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \quad \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

18. 다음 그림에서 점 $\mathrm{P}(5, 5)$와 직선 $y = 2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle\mathrm{PQR}$의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}} + \overline{\mathrm{RP}}$ 의 최솟값은 P를 $y = 2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{P}''(5, -5)$ 사이 거리와 같다.

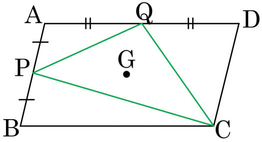
$\mathrm{P}' = (a, b)$ 라하면 $\overline{\mathrm{PP}'}$ 은 $y = 2x$에 수직이고

$\overline{\mathrm{PP}'}$ 의 중점은 $y = 2x$ 위에 있다

$\therefore\ \mathrm{P}' = (1,\ 7)$

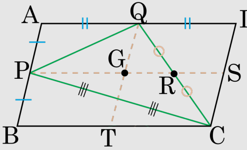
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}} + \overline{\mathrm{PR}} \geq \overline{\mathrm{P}'\mathrm{P}''} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$

19. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, b), \mathrm{C}(c, d)$이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 $(4, 1)$일 때, $a+b+c+d$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



위 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PG}}$의 연장선이 $\overline{\mathrm{QC}}, \overline{\mathrm{DC}}$와 만나는 점을 각각 R, S라 하고

$\overline{\mathrm{QG}}$의 연장선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 T라 하면

$\overline{\mathrm{AD}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{PS}}$이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고

$\overline{\mathrm{QT}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{DC}}$이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PG}} : \overline{\mathrm{GR}} = 2 : 1$, $\overline{\mathrm{GR}} : \overline{\mathrm{RS}} = 1 : 1$이므로 점 G는 선분 PS의 중점이다.

따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$이므로

$\frac{a+c}{2} = 4, \frac{b+d}{2} = 1$에서 $a+c=8, b+d=2$

$\therefore\ a+b+c+d = 8+2 = 10$