

1. 다음 중 이차함수인 것은?

- ① $y = 2x + 3$ ② $xy = 5$
③ $y = x(x + 3) - x^2$ ④ $y = x^2 + 2x$
⑤ $y = \frac{1}{x^2} - 2x$

해설

- ① 일차함수
② $y = \frac{5}{x}$ 이므로 이차함수가 아니다.
③ $y = 3x$ 이므로 일차함수
⑤ $y = \frac{1}{x^2} - 2x$ 가 x 에 관한 이차식이 아니므로 이차함수가
아니다.

2. 이차함수 $y = \frac{4}{5}x^2$ 의 그래프가 점 $(a, a^2 - 1)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\sqrt{5}$

해설

$$y = \frac{4}{5}x^2 \text{ 의 그래프가 점 } (a, a^2 - 1) \text{ 를 지나므로}$$

$$a^2 - 1 = \frac{4}{5}a^2$$

$$\frac{1}{5}a^2 = 1$$

$$a^2 = 5$$

$$a < 0 \text{ } \circ\text{]므로 } a = -\sqrt{5}$$

3. 다음 이차함수의 그래프 중 위로 볼록한 것은?

- ① $y = 4x^2$ ② $y = \frac{1}{3}x^2$ ③ $y = -3x^2$
④ $y = \frac{1}{4}x^2$ ⑤ $y = 2x^2$

해설

위로 볼록하려면 (x^2 의 계수) < 0 이므로 $y = -3x^2$

4. 다음 이차함수의 그래프를 폭이 좁은 것부터 나열하여라.

Ⓐ $y = \frac{1}{2}x^2$	Ⓑ $y = -\frac{1}{5}x^2$	Ⓒ $y = x^2$
Ⓓ $y = 3x^2$	Ⓔ $y = -2x^2$	

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ⓒ

▷ 정답: Ⓟ

▷ 정답: Ⓞ

▷ 정답: Ⓡ

▷ 정답: Ⓢ

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 클수록 폭이 좁다.

5. 다음은 $y = -2x^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 위로 볼록한 포물선이다.
- ② $y = 2x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ③ 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이고, 대칭축은 y 축이다.
- ④ 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.
- ⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가한다.

해설

$$\textcircled{4} \quad 2 \neq -2 \times 1^2$$

6. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 위로 볼록한 그래프이다.
- ② 점 $(3, -9)$ 을 지난다.
- ③ 원점 $(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 한다.
- ④ $y = x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

$y = -x^2$ 은 위로 볼록한 포물선이고 원점 $(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 한다. y 축에 대칭이므로 축의 방정식이 $x = 0$ 이다. $y = x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이고 $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고 $x > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. 따라서 ⑤이 답이다.

7. 다음의 이차함수 중에서 그라프가 아래로 볼록한 것은?

① $y = -x^2$

④ $y = -3x^2$

② $y = 4x^2$

⑤ $y = -\frac{1}{3}x^2$

③ $y = -\frac{1}{4}x^2$

해설

x^2 의 계수가 양수이면, 아래로 볼록하다

8. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 y 의 범위는?

- ① $y \geq 2$ ② $y \leq 2$ ③ $y \geq -8$
④ $y \leq -8$ ⑤ $y \geq 0$

해설

실수의 제곱은 항상 0 또는 양수이기 때문에 이 그래프의 y 의 값의 범위는 $y \geq 2$ 이다.

9. $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$ 의 그래프에서 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 차례대로 구하면?

- ① $x = 2, (2, 0)$ ② $x = 2, (-2, 0)$
③ $x = -2, (2, 0)$ ④ $x = -2, (-2, 0)$
⑤ $x = -2, (0, -2)$

해설

$y = \frac{1}{3}(x+2)^2$ 의 축의 방정식은 $x = -2$ 이고 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 0)$

10. 이차함수 $y = 3(x + 4)^2 - 2$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표를 (a, b) ,
축을 $x = c$ 라 할 때, $a + b - c$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = 3(x + 4)^2 - 2$ 의 꼭짓점의 좌표는
 $(-4, -2) = (a, b)$

축을 $x = c = -4$

$$\therefore a + b - c = -4 + (-2) - (-4) = -2$$

11. 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표와 축으로 옮은 것은?

- ① $(0, 4), x = 4$ ② $(0, -4), x = -4$
③ $(0, 4), x = 0$ ④ $(4, 0), x = 4$
⑤ $(4, 0), x = 0$

해설

꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$ 이고, 축은 $x = 0$ 이다.

12. 다음 중 이차함수인 것을 모두 고르면?

① $y = 5x$

③ $y = \frac{3}{x^2}$

⑤ $y = (x - 2)(x + 1)$

② $y = x(x + 5)$

④ $y = (x - 2)^2 - x^2 + 1$

해설

①은 일차함수, ③은 분수함수이고 ④는 정리하면 $y = -4x + 5$ 이므로 일차함수이다.

13. 이차함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 일 때, $f(2) + f(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{에서 } f(2) = 1, f(-1) = -2 \\ \therefore f(2) + f(-1) = -1$$

14. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(0) = -3$ ② $f(-1) = 6$ ③ $f(1) = 0$
④ $f(2) = 5$ ⑤ $f(-2) = -3$

해설

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = -4$$

15. 함수 $f(x) = x^2 + 3x - 5$ 에 대하여 $f(1) + f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

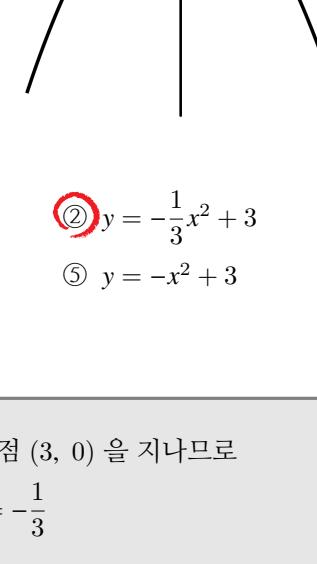
$$f(x) = x^2 + 3x - 5 \text{에서}$$

$$f(1) = 1 + 3 - 5 = -1$$

$$f(2) = 4 + 6 - 5 = 5$$

$$\therefore f(1) + f(2) = -1 + 5 = 4$$

16. 다음의 그림과 같은 이차함수의 그래프의 식은?



① $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ ② $\textcircled{2} y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ ③ $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$

④ $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$ ⑤ $y = -x^2 + 3$

해설

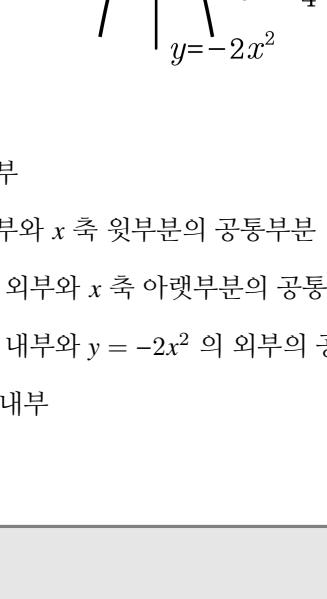
$y = ax^2 + 3$ 이] 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 9a + 3, a = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$$

17. $y = -\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 다음 좌표평면에 그리려고 한다. 다음 중 이

그래프가 위치하는 구역은?



- ① $y = x^2$ 의 내부
- ② $y = x^2$ 의 외부와 x 축 윗부분의 공통부분
- ③ $y = -\frac{1}{4}x^2$ 의 외부와 x 축 아래부분의 공통부분
- ④ $y = -\frac{1}{4}x^2$ 의 내부와 $y = -2x^2$ 의 외부의 공통부분
- ⑤ $y = -2x^2$ 의 내부

해설

$$-2 < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{4}$$

18. 다음 중 그래프의 폭이 가장 넓은 것은?

- Ⓐ $y = \frac{1}{4}x^2$ Ⓑ $y = 2x^2$ Ⓒ $y = -\frac{1}{3}x^2$
Ⓓ $y = -5x^2$ Ⓓ $y = \frac{4}{3}x^2$

해설

$y = ax^2$ 에서 a 의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓다.

19. 다음 이차함수의 그래프를 폭이 좁은 순으로 나열하여라.

$\textcircled{\text{A}} \quad y = -\frac{1}{2}x^2$	$\textcircled{\text{B}} \quad y = \frac{1}{5}x^2$	$\textcircled{\text{C}} \quad y = x^2$
--	---	--

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $\textcircled{\text{C}}$

▷ 정답: $\textcircled{\text{A}}$

▷ 정답: $\textcircled{\text{B}}$

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 클수록 폭이 좁다.

20. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

(가) 원점을 꼭짓점으로 한다.
(나) 대칭축은 y 축이다.
(다) y 의 값의 범위는 $y > 0$ 이다.
(라) $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

- ① (가), (나)
② (가), (나), (다)
③ (나), (다)
④ (가), (나), (라)
⑤ (나), (라)

해설

(다) y 의 값의 범위는 $y \geq 0$
(라) $x < 0$ 에서 x 값 증가, y 는 감소

21. 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a, b 의 부호는?

- ① $a < 0, b > 0$ ② $a > 0, b > 0$
③ $a > 0, b < 0$ ④ $a < 0, b = 0$
⑤ $a < 0, b < 0$



해설

위로 볼록하고, 꼭짓점이 x 축의 위에 있으므로, $a < 0, b > 0$ 옳다.

22. 이차함수 $y = -ax^2 + b$ 의 그래프가 다음
그림과 같을 때, a, b 의 부호는?

- ① $a < 0, b > 0$ ② $a > 0, b > 0$
③ $a > 0, b < 0$ ④ $a < 0, b = 0$
⑤ $a < 0, b < 0$



해설

위로 볼록하고, 꼭짓점이 x 축의 위에 있으므로, $a > 0, b > 0$ 옳다.

23. 이차함수 $y = -\frac{3}{2}x^2 - 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동 시켰더니 점 $(4, k)$ 를 지났다. 이때, k 의 값을 구하면? (단, $k > 0$)

- ① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

$$y = -\frac{3}{2}x^2 - 1 \text{ 의 그래프를 } y \text{ 축의 방향으로 5 만큼 평행이동}$$

$$\text{시킨 함수의 식은 } y = -\frac{3}{2}x^2 + 4 \text{ 이고, 점 } (4, k) \text{ 를 지나므로}$$

$$k = -\frac{3}{2} \times 4^2 + 4, k = -20 \text{ 이다.}$$

24. 이차함수 $y = 3(x - 1)^2 - 3$ 의 그래프는 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프이다. a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1$

▷ 정답: $b = -3$

해설

$y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의식은 $y = 3(x - a)^2 + b$ 이므로 $a = 1, b = -3$ 이다.

25. 평행이동에 의하여 포물선 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ 의 그래프와 완전히 포개어지는 것은?

① $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$ ② $y = -3x^2 - 2x + 1$

③ $y = 3x^2 + 1$ ④ $y = x^2 + 1$

⑤ $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$

해설

완전히 포개어지려면 x^2 의 계수가 같아야 한다.

26. 포물선 $y = -3x^2 - 4$ 의 그래프와 평행이동에 의하여 완전히 포개어지는 것은?

- ① $y = 3x^2 + 1$ ② $y = -3(x - 1)^2$
③ $y = 3x^2 - 3$ ④ $y = 2(x - 1)^2 - 3$
⑤ $y = 3x^2$

해설

이차항의 계수가 같은 것을 찾는다.

27. 이차함수 $y = 2(x - 4)^2 + 3$ 의 그래프에 대하여 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 바르게 구한 것을 고르면?

- ① $(2, 3), x = 2$ ② $(4, 3), y = 3$
③ $(-4, -3), y = -3$ ④ $(4, 3), x = 4$
⑤ $(-4, 3), x = -4$

해설

$y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 (p, q) 이고 축의 방정식은 $x = p$ 이다.

28. 이차함수 $y = -2(x + 5)^2 - 4$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표를 (a, b) ,
즉 $x = c$ 라 할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$$y = -2(x + 5)^2 - 4 \text{ 의 꼭짓점의 좌표는}$$

$$(-5, -4) = (a, b)$$

$$\therefore x = c = -5$$

$$\therefore a - b + c = -5 - (-4) + (-5) = -6$$

29. 이차함수 $y = (x+3)^2 - 4$ 의 그래프의 축의 방정식을 $x = m$, 이차함수 $y = -2(x-5)^2 + \frac{1}{2}$ 의 그래프의 축의 방정식을 $x = n$ 라 할 때, $m-n$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ -5 ④ -8 ⑤ 0

해설

$y = (x+3)^2 - 4$ 의 축의 방정식은 $x = -3$, $y = -2(x-5)^2 + \frac{1}{2}$ 의 축의 방정식은 $x = 5$ 이다.
따라서 $m-n = -8$ 이다.

30. 다음 중 아래 주어진 이차함수의 그래프를 x 축에 대칭인 것끼리 바르게 짹지어 놓은 것은?

<input type="checkbox"/> Ⓛ $y = x^2$	<input type="checkbox"/> Ⓜ $y = -x^2 - 1$
<input type="checkbox"/> Ⓝ $y = (x + 1)^2$	<input type="checkbox"/> Ⓞ $y = x^2 + 1$

① Ⓛ, Ⓜ ② Ⓜ, Ⓞ ③ Ⓝ, Ⓟ ④ Ⓛ, Ⓟ ⑤ Ⓜ, Ⓟ

해설

$y = ax^2 + q$ 와 x 축에 대칭인 함수는 $y = -ax^2 - q$ 이다.

31. 이차함수 $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선이

점 $(6, a)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$y = -\frac{3}{2}(x-2)^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선은

$y = \frac{3}{2}(x-2)^2$ 이다.

이다. 따라서 식에 $(6, a)$ 를 대입하면 $a = \frac{3}{2} \times 4^2 = 24$ 이다.

32. 이차함수 $y = (x - 1)^2 - 2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선
식은?

① $y = (x - 1)^2 + 2$

② $y = (x + 1)^2 + 2$

③ $y = (x - 1)^2 - 2$

④ $y = -(x + 1)^2 + 2$

⑤ $y = -(x - 1)^2 + 2$

해설

y 대신에 $-y$ 를 대입하면 $y = -(x - 1)^2 + 2$ 이다.

33. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수는?

- ① $y = -x^2$ ② $y = -\frac{1}{2}x^2$ ③ $y = -2x^2$
④ $y = \frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y = x^2$

해설

$y = 2x^2$ 의 y 대신에 $-y$ 를 대입하면
 $y = -2x^2$ 이다.

34. 이차함수 $y = (x+2)^2 + 3$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선의 식은?

- ① $y = (x-2)^2 + 3$ ② $y = (x-2)^2 - 3$
③ $y = -(x+2)^2 - 3$ ④ $y = -(x+2)^2 + 3$
⑤ $y = (x+2)^2 + 3$

해설

x 축 대칭이므로 y 대신에 $-y$ 를 대입하면
 $y = -(x+2)^2 - 3$ 이다.

35. 다음 중 아래 주어진 이차함수의 그래프를 x 축에 대칭인 것끼리 바르게 짹지어 놓은 것은?

<input type="radio"/> Ⓛ $y = 3x^2 + 2$	<input type="radio"/> Ⓜ $y = 2(x - 1)^2$
<input type="radio"/> Ⓝ $y = 2x^2$	<input type="radio"/> Ⓞ $y = -3x^2 - 2$

① Ⓛ, Ⓜ ② Ⓛ, Ⓞ Ⓝ Ⓛ, Ⓞ ④ Ⓜ, Ⓞ ⑤ Ⓝ, Ⓞ

해설

$y = ax^2 + q$ 와 x 축에 대칭인 함수는 $y = -ax^2 - q$ 이다.

36. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프 위에 점 $(3, a)$ 가 있을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 9$

해설

$$y = x^2 \text{ } \diamond \parallel x = 3, y = a \text{ 를 대입하면}$$
$$a = 3^2 = 9$$

37. 다음 보기 중 $y = 2x^2$ 과 서로 x 축에 대하여 대칭을 이루는 함수를 고르면?

- ① $y = 4x^2$ ② $y = \frac{1}{2}x^2$ ③ $y = -2x^2$
④ $y = \frac{1}{4}x^2$ ⑤ $y = x^2$

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 반대인 이차함수를 찾는다.

38. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 아래로 볼록한 포물선이다.
- ② 점 $(2, 4)$ 를 지난다.
- ③ 꼭짓점은 원점이다.
- ④ 축의 방정식은 $y = 0$ 이다.
- ⑤ $x > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

해설

- ④ 축의 방정식은 $x = 0$ 이다.

39. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 원점(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
- ② y 축에 대하여 대칭이다.
- ③ a 의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 넓어진다.
- ④ $a > 0$ 일 때 아래로 불록, $a < 0$ 일 때 위로 불록하다.
- ⑤ $y = ax^2$ 와 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 서로 대칭이다.

해설

$y = ax^2$ 의 그래프는 다음의 기본성질을 갖는다.

꼭짓점은 $(0, 0)$, 대칭축은 y 축, 즉 $x = 0$ 이다.

$a > 0$ 이면 아래로 불록, $a < 0$ 이면 위로 불록하다.

$|a|$ 이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.

$y = -ax^2$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

따라서 ③이 옳지 않다.

40. 이차함수 $y = -x^2$ 에 대한 설명이다. 옳지 않은 것은?

- ① 꼭짓점이 $(0, 0)$ 인 위로 볼록한 포물선이다.
- ② $y = x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ③ 축의 방정식은 $x = 0$ 이다.
- ④ x 가 증가함에 따라 $x < 0$ 일 때, y 는 증가한다.
- ⑤ 점 $(-3, 9)$ 를 지난다.

해설

점 $(-3, -9)$ 을 지난다.

41. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하였

더니 점 $(a, 2)$ 를 지났다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1$

▷ 정답: $a = 5$

해설

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 \text{ 에 점 } (a, 2) \text{ 를 대입}$$

$$2 = \frac{1}{2}(a - 3)^2, (a - 3)^2 = 4$$

$$a - 3 = \pm 2$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

42. 이차함수 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 점 $(4, k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$$y = 2(-x + 1)^2 - 3$$

$$y = 2(x - 1)^2 - 3$$

점 $(4, k)$ 를 대입하면

$$2(4 - 1)^2 - 3 = k$$

$$\therefore k = 15$$

43. 이차함수 $y = -3(x-1)^2 + 2$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-1, k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}y &= -3(-x-1)^2 + 2 \\y &= -3(x+1)^2 + 2 \\\text{점 } (-1, k) \text{ 를 대입하면} \\-3(-1+1)^2 + 2 &= k \\\therefore k &= 2\end{aligned}$$

44. $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 x 축에 대하여 대칭이동 한 그래프의 식을 구하면?

- ① $y = -2(x + 3)^2$ ② $y = -2(x - 3)^2$
③ $y = 2(x - 3)^2$ ④ $y = 2(x + 3)^2$
⑤ $y = -2(3x - 1)^2$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 $y = 2(x - 3)^2$ 이고, 이를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = 2(x - 3)^2$ 이다.

따라서 $y = -2(x - 3)^2$ 이다.

45. $y = -x^2$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 방정식은?

- ① $y = -x^2 + 4x - 4$ ② $y = x^2 - 4x + 4$
③ $y = -x^2 - 4x - 4$ ④ $y = -x^2 - 4x + 4$
⑤ $y = x^2 + 4x - 4$

해설

$$\begin{aligned}x \text{ 축의 방향으로 2 만큼 평행이동시키면 } y &= -(x - 2)^2 \\y \text{ 축에 대하여 대칭이동시키면 } y &= -(-x - 2)^2 \\&= -(x^2 + 4x + 4) \\&= -x^2 - 4x - 4\end{aligned}$$