1. 방정식 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 (0, 1) 이고, 반지름이 1 인 원
② 중심이 (0, 1) 이고, 반지름이 2 인 원
③ 중심이 (0, 1) 이고 반지름이 4 인 원
④ 중심이 (0, −1) 이고 반지름이 2 인 원
⑤ 중심이 (0, −1) 이고 반지름이 1 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$\Rightarrow$ $x^2 + (y-1)^2 = 4$ 중심은 (0, 1) 이고,
반지름은 2 인 원이다.

2. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$이다. $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이다.
(지름의 길이) $= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

3. 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2-4c=0$ ② $b^2+4c=0$
③ $a^2-4c=0$ ④ $a^2+b^2-4c=0$
⑤ $a^2+b^2+4c=0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 되므로
$y^2+by+c=0$ ······ ㉠
원이 y 축과 접하려면 ㉠의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$
$\therefore\ D=b^2-4c=0$

4. 두 원 $(x-2)^2+y^2=10$, $x^2+y^2+y-5=0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$(x-2)^2+y^2=10$ 에서
$x^2+y^2-4x-6=0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$
$4x+y+1=0, y=-4x-1$
$\therefore a=-4, b=-1$
$\therefore a+b=-4+(-1)=-5$

5. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$　② $(-2, 3)$　③ $(2, -3)$
④ $(-2, -3)$　⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$
$\therefore a - b - c = 2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$
$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2 + 6a + c = 0$
$\therefore 6a + c = -36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a = -4,\ b = 6,\ c = -12$
즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

6. 이차방정식 $x^2-ay^2-4x+2y+k=0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a=(\quad\quad)$, $k<(\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a=-1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2-4x+y^2+2y+k=0$ 에서
$(x-2)^2+(y+1)^2=5-k$
여기서, $5-k>0$ 이어야 하므로 $k<5$

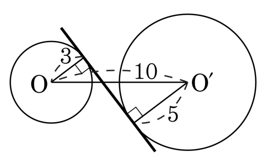
7. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm ② 10 cm ③ 11 cm ④ 12 cm ⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9-4)^2} = 12$

8. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

9. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$　② $0 < k < 4$　③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$　⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

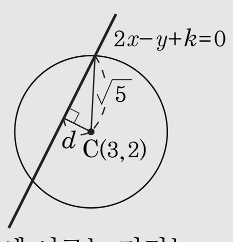
$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4 < k < 4$$

10. 점 A$(5,3)$, B$(1,1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$　　② $-11<k<-1$　　③ $-10<k<0$

④ $-9<k<1$　　⑤ $-8<k<3$

해설



두 점 A$(5,3)$, B$(1,1)$ 의 중점이 $(3,2)$ 이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$

점B와 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$

원의 중심 C$(3,2)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 에 이르는 거리는

$$d=\frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5,\ -5<k+4<5$

$\therefore\ -9<k<1$

11. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2},\ m > 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

③ $1 < m < 3$　　④ $m < 1,\ m > 3$

⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면
$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ 이다.
원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2+1}$$
$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$
$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$\therefore\ m < -2\sqrt{2}$ 또는 $m > 2\sqrt{2}$

12. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$이므로

$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$

$\Rightarrow x=-2,\ -8$

$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8,\ 0),\ (-2,\ 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

13. 좌표평면 위에 다음과 같은 한 직선과 두 원이 있다.

$y = mx + 3 \cdots$ ㉠
$x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉡
$x^2 + y^2 = 4 \cdots$ ㉢

직선 ㉠은 원 ㉡와 만나지 않고, 원 ㉢과는 공유점을 가질 때, m 의 값의 범위를 구하시오.(단, $m > 0$)

① $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{3}$
② $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{2}$
③ $\sqrt{5} \le m < 4$
④ $\frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{3}$

해설

원과 직선이 만나지 않으면 원 중심에서 직선까지의 거리가 반지름보다 크고 공유점이 있으면 반지름 이하이다.

$\Rightarrow$ i) ㉡ 와 안 만날 때 : $\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$

ii) ㉢ 과 공유점을 가질 때 : $\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} \le 2$

$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2},\ m \le -\frac{\sqrt{5}}{2}$

또는 $m \ge \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}\ (\because m > 0)$

14. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

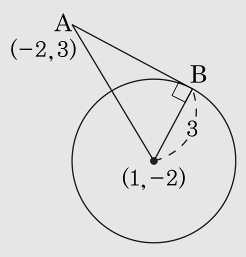
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



15. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

16. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$　　② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$　　④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로
두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는
원의 중심은 $(a, 2a)$로 나타낼 수 있다.
$(a,\ 2a)$를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$이다.
따라서 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$은
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.
두 식을 연립하면, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식이
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$임을 알 수 있다.

17. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π　　② 3π　　③ 4π　　④ 5π　　⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S = \pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$= \pi(a^2-2a+4) = \pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

18. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는
$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$
따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면
$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

19. 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$과 $x^2+y^2-2x-1=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=5$　② $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
③ $(x-3)^2+(y+1)^2=10$　④ $(x+3)^2+(y-1)^2=10$
⑤ $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

해설
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y-2+k(x^2+y^2-2x-1)=0$
이 원이 원점을 지나므로
$x=y=0$을 대입하면
$-2-k=0$
$\therefore\ k=-2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y-2-2(x^2+y^2-2x-1)=0$
$-x^2-y^2+6x-4y=0$,
$x^2+y^2-6x+4y=0$
$\therefore\ (x-3)^2+(y+2)^2=13$

20. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

21. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡ 에 대입하면 $a^2=4c$

$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

22. 직선 $x = 2$에 접하고, 원 $(x+3)^2 + y^2 = 1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2 = -8x$ ② $y^2 = 8x$ ③ $y^2 = -12x$

④ $x^2 = -8y$ ⑤ $x^2 = 8y$

해설

구하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x, y)$라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x = 2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2 + y^2 = 1$의 중심을 A라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} - 1 = \overline{\mathrm{BP}}$ 에서

$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$

$\therefore\ y^2 = -12x$

23. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

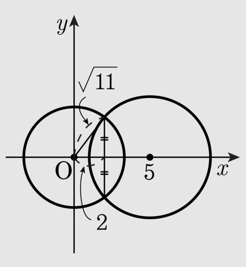
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

$\left(x^2+y^2-11\right)-\left(x^2-10x+y^2+9\right)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$



원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$

24. 두 점 $A(-1, 3)$, $B(2, a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$과 접할 때, a의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

두 점 $A(-1, 3)$, $B(2, a)$를
지나는 직선의 방정식은, $y-3=\frac{a-3}{3}(x+1)$
$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$과 접하므로
원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1과 같다.
$$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$$
$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$, $18a=-18$
$\therefore\ a=-1$