

1. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (8)^2 - 2 \cdot (17) = 30$$

$$-2\alpha\beta\gamma = -2 \cdot 10 = -20$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma = 10$$

2. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β 라 하면
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\beta + (1 - \sqrt{2})\beta = 5$
 $-1 + 2\beta = 5, 2\beta = 6 \quad \therefore \beta = 3$
따라서, $a = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + 3 = 5$
 $b = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) \cdot 3 = -3$ 이므로
 $a + b = 5 + (-3) = 2$

3. 방정식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

- ① 7
- ② 11
- ③ 15
- ④ 19
- ⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
 $\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$
 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ 이다. $x = 2$ 를 대입하면 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 2^3 - 2^2(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 3 + 1 = 8 + 8 - 6 + 1 = 11$

4. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

5. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + 3w^4 - 2w^5$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -4

해설

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일 때
 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로
 $1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 \cdot 1 + 3\omega^3 \cdot \omega - 2\omega^3 \cdot \omega^2$
 $= 1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 + 3\omega - 2\omega^2$
 $= \omega^2 + \omega + 1 - 4 = -4$
 $\therefore -4$

6. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 40 cm, 겉넓이는 62 cm^2 , 부피가 30 cm^3 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?
- ① 3 cm ② 3.5 cm ③ 4 cm
④ 4.5 cm ⑤ 5 cm

해설

각 모서리의 길이를 x, y, z 라고 하면
문제의 뜻에서
(i) $4(x + y + z) = 40$
 $\therefore x + y + z = 10$
(ii) $2(xy + yz + zx) = 62$
 $\therefore xy + yz + zx = 31$
(iii) $xyz = 30$
따라서, x, y, z 는 삼차방정식
 $t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0$ 의 세 근이다.
 $(t - 2)(t - 3)(t - 5) = 0$
 $\therefore t = 2, 3, 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 5(cm)이다.

7. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, $\frac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \frac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$ 을 계산하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \\(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 &= 0, \omega^2 + \omega = -1 \\\frac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \frac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}} \\&= \frac{\omega^2 + \omega}{1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega} \\&= -1 - 1 = -2\end{aligned}$$