1. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ -\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2},\ -\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

2. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡
$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢
㉠, ㉡에서
$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣
$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=20$
$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$
$t=1,\ -2,\ 3$
$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$
$\therefore\ x-2y+z=-1$

3. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

4. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

5. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$　　㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢　② ㉡　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉢, ㉣, ㉤　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㉠, ㉡

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㉢

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㉣

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㉤