

1. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$

(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$

④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$

② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

2. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때, $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단, $x < y < z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x + y + z = 2 \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{㉡}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{㉣}$$

$$x^3 + y^3 + z^3$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 20$$

$$\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 이용하여 x, y, z 를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 1, -2, 3$$

$$x < y < z \text{이므로 } x = -2 \ y = 1 \ z = 3$$

$$\therefore x - 2y + z = -1$$

3. 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하는 x 의 삼차방정식은 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -3$$

$$-c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

4. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면 $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4$, $b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

5. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$