1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(a)$를 잇는 선분 AB에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$를 만족시키는 a 의 값들의 합은?

① -6 ② -5 ③ 3 ④ 5 ⑤ 6

해설

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(a)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = |a-(-3)|$ 이므로

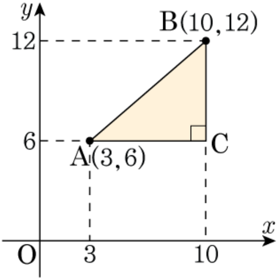
$|a+3| = 5$

$a+3=5$ 또는 $a+3=-5$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-8$

따라서 a의 값들의 합은 -6 이다.

2. 다음 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 6)$, $B(10, 12)$ 사이의 거리를 구하는 과정이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 구하여라.



(두 점 A, B 사이의 거리)$= \overline{AB}$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10-3)^2 + (12-6)^2 \\ &= 49 + 36 \\ &= 85 \end{aligned}$$

$\therefore \overline{AB} = \boxed{}$

① $3\sqrt{5}$ ② 6 ③ $6\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{85}$

해설

(두 점 A, B 사이의 거리)$= \overline{AB}$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10-3)^2 + (12-6)^2 \\ &= 49 + 36 = 85 \end{aligned}$$

3. 두 점 A $(-3, 2)$, B $(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$

④ $(3,\ 0)$ ⑤ $(4,\ 0)$

해설

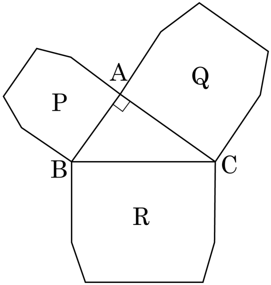
$\mathrm{P}(x, 0)$ 이라 놓으면 두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

$\sqrt{(x+3)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(5-0)^2} \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow$

$x = 2$

$\therefore\ \ \mathrm{P}\ (2, 0)$

4. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy=z$　　② $x+y=z$

③ $x^2+y^2=z^2$　　④ $x^3+y^3=z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x+y=z$

5. 두 점 $A(-2,-1)$, $B(1,3)$을 잇는 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는?

① $(5,-1)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ ③ $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

④ $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ ⑤ $(3,1)$

해설

$$\left(\frac{3+2}{3-1}, \frac{9+1}{3-1}\right) = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$$

6. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $B'(3,\ -4)$

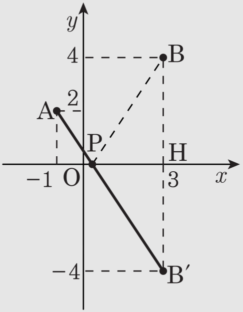
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최소거리는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최소 거리와 같고

세 점 A, P, B′이 직선 위에 있을 때

가장 짧은 $\overline{AB'}$이 최소거리이다.

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



7. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$ ② $C(3,\ 0)$ ③ $C(3,\ 4)$

④ $C(1,\ -1)$ ⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

8. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

9. 두 점 $\mathrm{A}(0,3)$, $\mathrm{B}(5,-2)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$ ② $(2,0)$ ③ $(3,0)$ ④ $(4,0)$ ⑤ $(5,0)$

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로, $\alpha^2+9=(\alpha-5)^2+2^2$

$\therefore\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P} = (2,0)$

10. 직선 $y=2x$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(3,1)$에서 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$라고 할 때, $\alpha\beta$를 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=2x$ 위에 있으므로P $(\alpha, 2\alpha)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha-2)^2+(2\alpha)^2=(\alpha-3)^3+(2\alpha-1)^2$

$-4\alpha+4=-6\alpha-4\alpha+10$

$\therefore\ \alpha=1,\ \ \beta=2$

11. 세 꼭지점이 A$(-2, 1)$, B$(2,\ 3)$, C$(3, -2)$로 주어지는 삼각형의 외심의 좌표는?

① $\left(\frac{2}{11},\ \frac{2}{11}\right)$ ② $\left(\frac{10}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ③ $\left(1,\ \frac{2}{11}\right)$
④ $\left(\frac{10}{11},\ \frac{12}{11}\right)$ ⑤ $\left(\frac{10}{11},\ \frac{2}{11}\right)$

해설

외심이란 세변의 수직이등분선의 교점이므로 세 변 중 두변의 수직이등분선의 교점도 삼각형의 외심이다. 우선, 선분 AB 중점의 좌표를 구하면 $(0,\ 2)$이고, 직선 AB 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -2

∴ 기울기가 -2이고, 중점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y = -2x + 2 \cdots$ ㉠

선분 AC 중점의 좌표를 구하면 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이고, 직선 AC의 기울기가 $-\frac{3}{5}$이므로 선분 AC 수직이등분선의 기울기는 $\frac{5}{3}$

∴ 기울기가 $\frac{5}{3}$이고, 중점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은
$y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면, $x = \frac{10}{11}$, $y = \frac{2}{11}$

따라서 외심의 좌표 : $\left(\frac{10}{11},\ \frac{2}{11}\right)$

12. 세 점 A(2, 5), B(−1, 0), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여

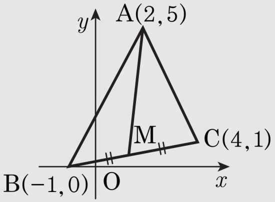
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$

$\therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

$= \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]$

$= \frac{1}{2}(9+25+4+16) = 27$



13. 점 $(2, a)$, $(b, 3)$ 을 이은 선분을 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표가 $(b-1, a+6)$ 일 때, a, b 의 값은?

① $a=-6,\ b=5$　　② $a=6,\ b=-5$　　③ $a=-6,\ b=3$

④ $a=5,\ b=3$　　⑤ $a=3,\ b=5$

해설

점 $(2, a)$, $(b, 3)$ 을 이은 선분을 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표 (x, y) 는

$$x=\frac{2\cdot b+1\cdot 2}{2+1}=\frac{2b+2}{3},$$

$$y=\frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}=\frac{6+a}{3}$$

이 점의 좌표가 $(b-1, a+6)$ 이므로

$$\frac{2b+2}{3}=b-1,\ \frac{6+a}{3}=a+6$$

이 식을 풀면, $a=-6,\ b=5$

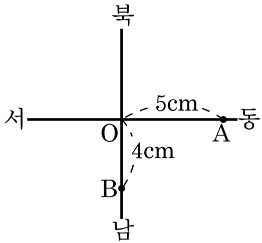
14. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심의 좌표는?

① O$\left(\frac{5}{8}, 0\right)$ ② O$\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ ③ O$\left(0, \frac{5}{8}\right)$
④ O$\left(0, \frac{8}{5}\right)$ ⑤ O(0, 0)

해설

두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{CO}}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{BO}}$에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x-6y = 16$
즉 $5x-3y = 8 \cdots$②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 O$\left(\frac{8}{5}, 0\right)$이다.

15. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후 ② 1.5시간 후 ③ 1.6시간 후

④ 1.7시간 후 ⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ -4)$ 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 $A(5-4t,\ 0)$, $B(0,\ -4+2t)$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s=\sqrt{\{0-(5-4t)\}^2+(-4+2t-0)^2}$

$=\sqrt{20t^2-56t+41}=\sqrt{20\left(t-\frac{14}{10}\right)^2+\frac{9}{5}}$

s 는 $t=\frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.