1. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 5 > 3 - 2x \\ 2(x-3) \le x + 4 \end{cases}$$

① $2 \le x < 10$ ② $2 < x \le 10$ ③ $2 < x < 10$

④ $2 \le x \le 10$ ⑤ $x \le 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x > 2 \cdots\cdots$ ㉠
두 번째 부등식에서 $2x - 6 \le x + 4$
$\therefore x \le 10 \cdots\cdots$ ㉡
따라서, 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore 2 < x \le 10$

2. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \le 0 \\ x^2 + 4x \ge 0 \end{cases}$$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

$2x^2 - 5x - 3 \le 0$

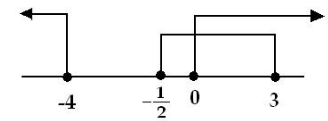
$(x-3)(2x+1) \le 0$

$\rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 3$

$x^2 + 4x \ge 0$

$x(x+4) \ge 0$

$x \le -4$ 또는 $x \ge 0$



해 : $0 \le x \le 3$ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Leftarrow$ 정수해

3. x 에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} |x+4| > 3x \\ 2x(x-3) \geq 0 \end{cases}$$ 을 풀면?

① $x \leq 0$ ② $-2 < x < 3$ ③ $x < 0, x > 2$

④ $0 < x < 2$ ⑤ $x \geq 3$

해설

$$\begin{cases} |x+4| > 3x & \cdots ㉠ \\ 2x(x-3) \geq 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠식에서

i) $x \geq -4$ 일때

$x+4 > 3x \rightarrow 2x < 4 \rightarrow x < 2$

$\Rightarrow -4 \leq x < 2$

ii) $x < -4$ 일때

$-x-4 > 3x \rightarrow 4x < -4 \rightarrow x < -1$

$\therefore x < -4$

i), ii) 에서 $x < 2$

㉡식에서 $2x(x-3) \geq 0 \rightarrow x \geq 3$, $x \leq 0$

㉠과㉡ 공통범위 : $x \leq 0$

4. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} |x+3| \le 4 \\ x^2+7x-18>0 \end{cases}$$

① 모든 실수

② 해는 없다

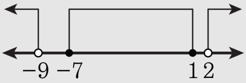
③ $-7 \le x \le 1$

④ $x < -9$ 또는 $x > 2$

⑤ $-9 \le x < -7$ 또는 $1 \le x < 2$

해설

$$\begin{cases} -4 \le x+3 \le 4,\ \ -7 \le x \le 1 & \cdots ㉠ \\ (x+9)(x-2)>0,\ \ x<-9,\ \ x>2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$



5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2 \ge 2-x \end{cases}$ 의 해와 부등식 $ax^2+2bx-(a+2b) \ge 0$ 의 해가 일치할 때, $\dfrac{b}{a}$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2-3x \le 0 \cdots (가) \\ x^2 \ge 2-x \cdots (나) \end{cases}$$

(가) 에서 $x(x-3) \le 0 \quad \therefore 0 \le x \le 3$

(나) 에서

$x^2+x-2 \ge 0, \quad (x+2)(x-1) \ge 0$

$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 1$

따라서 (가) 와 (나) 의 공통 범위를 구하면

$1 \le x \le 3$

해가 $1 \le x \le 3$ 이고 이차항의 계수가

$a(a<0)$ 인 부등식은

$a(x-1)(x-3) \ge 0$

$ax^2-4ax+3a \ge 0$

$\therefore -4a = 2b, \quad 3a = -(a+2b)$

$-4a = 2b$에서 $\quad b = -2a$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2a}{a} = -2$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 2x^2 + (7-2a)x - 7a < 0 \end{cases}$

을 만족하는 정수가 -3한 개뿐일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-3 < a \le 3$ ② $-3 < a \le 2$ ③ $-2 < a \le 7$

④ $0 < a \le 7$ ⑤ $7 < a \le 10$

해설

$x^2 - 4 > 0$에서

$(x+2)(x-2) > 0$

$\therefore x < -2$ 또는 $x > 2 \cdots$ ㉠

$2x^2 + (7-2a)x - 7a < 0$에서

$(2x+7)(x-a) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 정수가

-3뿐이어야 하므로

a가 취할 수 있는 범위는 $-3 < a \le 3$이다.

7. 두 부등식 $|x-a| < 2$, $x^2 - 2x + 1 - b^2 \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 없도록 하는 양수 a, b의 관계식은?

① $a - b \geq 3$ ② $a - b \leq 3$ ③ $a - b > 3$

④ $a - b < 3$ ⑤ $a - b > -3$

해설

$-2 < x - a < 2$

$\Rightarrow \quad -2 + a < x < 2 + a$

$x^2 - 2x + 1 - b^2 \geq 0$

$\Rightarrow \{x - (1+b)\}\{x - (1-b)\} \leq 0$

$\Rightarrow \quad 1 - b \leq x \leq 1 + b$

두 부등식의 공통범위가 없으려면

$2 + a \leq 1 - b$이거나

$1 + b \leq -2 + a$이어야 한다

$\Rightarrow a + b \leq -1$ 또는 $a - b \geq 3$

8. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 3, 4, x이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 3^2, 4^2, x^2이다. 이 때, 정수 x의 값의 개수는?

① 2 개 ② 3 개

③ 4 개 ④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야 하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의
6개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

9. 세 변의 길이가 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1$, x, $x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$①

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$②

①과 ②에서 $2<x<4$

$\therefore \ a=2, \ b=4$

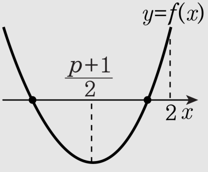
따라서 $a+b=6$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0 < p < 1$　② $\frac{1}{2} < p < 1$　③ $1 \le p < 2$
④ $1 < p < \frac{4}{3}$　⑤ $p > 1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$
$p^2+6p-7>0,\ \ (p+7)(p-1)>0$
$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$
(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$
$3p<4$
$\therefore p<\frac{4}{3}$
(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로
$\frac{p+1}{2}<2$
$\therefore p<3$
(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$
그런데 $p>0$ 이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

12. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

보기

(ⅰ) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ⅱ) 2가 두 근 사이에 있다.

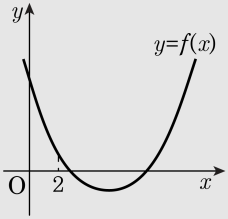
① $8 \le m < 10$, $m > 10$ ② $8 \le m < 10$, $m > 8$

③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$ ④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$

⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

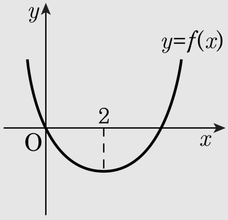
해설

(ⅰ) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ⅱ)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

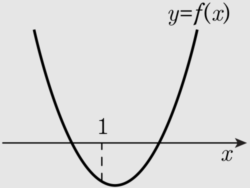
13. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

14. 이차부등식 $x^2-3x+2<0$을 만족하는 모든 x가 이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $a>1$　③ $0<a<1$

④ $0\le a\le 1$　⑤ $a\ge 1$

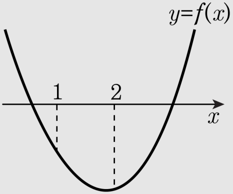
해설

$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$ 이 $1<x<2$에서 항상 성립해야하므로

$f(x)=x^2-2ax+a-1$로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1)\le 0$, $f(2)\le 0$이어야 한다.



$f(1)=1-2a+a-1\le 0$ 에서 $a\ge 0$ ······ ㉠

$f(2)=4-4a+a-1\le 0$ 에서 $a\ge 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge 1$

15. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-4=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a>3$ ② $0<a<3$ ③ $a \geq \frac{1}{2}$

④ $a \geq 1$ ⑤ $-1<a<3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1)>0, f(0)<0, f(1)<0, f(2)>0$ 이어야 한다.

따라서 $f(-1)=a+(a+1)-4>0$ 에서

$2a>3 \quad \therefore \ a>\frac{3}{2} \cdots$ ㉠

$f(2)=4a-2a-2-4>0$ 에서

$2a>6 \quad \therefore \ a>3 \cdots$ ㉡

㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로

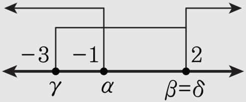
구하는 a의 값의 범위는 $a>3$

16. 두 부등식 $x^2+ax+b\geq 0$, $x^2+cx+d\leq 0$을 동시에 만족하는 x의 범위가 $-3\leq x\leq -1$ 또는 $x=2$라고 한다.
이 때 $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -3

해설

$x^2+ax+b\geq 0$의 해를 $x\leq\alpha$, $x\geq\beta$
$x^2+cx+d\leq 0$의 해를 $\gamma\leq x\leq\delta$라고 하면



공통의 해가 $-3\leq x\leq -1$ 또는 $x=2$이려면
다음 그림에서와 같이 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$, $\delta=2$이어야 한다.

$\therefore x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$이므로 $a=-1$, $b=-2$
$x^2+cx+d=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$이므로 $c=1$, $d=-6$
따라서 $a+b+c+d=-1+(-2)+1+(-6)=-8$

17. 세 변의 길이가 $x,\ x+1,\ x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되는 x의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때,$\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x+2$가 최대변이므로

$x+2 < (x+1)+x \quad \therefore\ x > 1 \cdots\cdots$ ㉡

둔각삼각형이 되는 조건은

$(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$

$\therefore\ -1 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢에서 공통범위를 구하면

$1 < x < 3$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 3$

$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

18. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ii) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

i), ii) 의 공통 범위 : $-2<a<2$

19. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k값의 범위를 구하면?

① $k < 0$, $k > 1$　② $k \le 0$, $k \ge 2$　③ $0 < k < 1$

④ $0 \le k \le 1$　⑤ $0 < k < 2$

해설

$x^2 - 2x + k = f(x)$라 하면

$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$

$\therefore k > 0, k < 1$

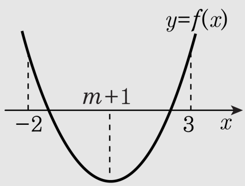
$\therefore 0 < k < 1$

20. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

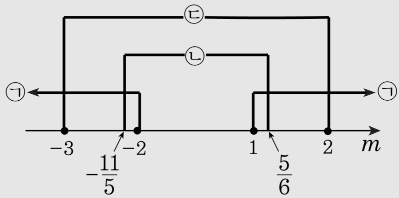
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\dfrac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\dfrac{6}{5}$

$\therefore -\dfrac{11}{5}<m<\dfrac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\dfrac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\dfrac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

21. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 2+$ ③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

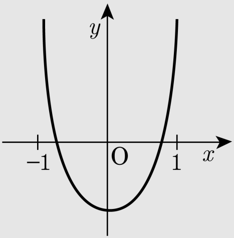
$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

22. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0$, $\therefore k\le 0,\quad k\ge 1$



$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

$f(1)=1+3k>0 \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$

23. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\dfrac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\dfrac{13}{6}$

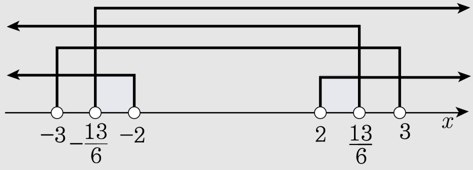
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\ \ \therefore \dfrac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\dfrac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\dfrac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\dfrac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

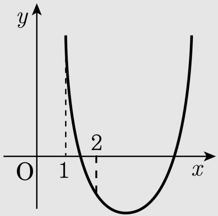
24. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근 중 한 근만이 $x^2-3x+2=0$ 의 두근 사이에 존재할 때, 실수 k의 범위는?

① $2<k<4$　② $1<k<6$　③ $5<k<8$

④ $5<k<12$　⑤ $8<k<12$

해설

$f(x) = x^2-6x+k$ 에서 그래프의 중심축이 $x=3$이므로 다음 그림과 같은 형태로 그래프가 그려질 때 주어진 조건을 만족한다.



$f(1)=k-5>0,\ k>5$

$f(2)=k-8<0,\ k<8$

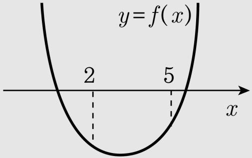
$\therefore\ 5<k<8$

25. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 에서
$(x-2)(x-5)=0$ $\therefore$ $x=2$ 또는 $x=5$
$f(x)=x^2-6x+k$ 로 놓으면 함수 $y=f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)<0$, $f(5)<0$ 이므로
$f(2)=-8+k<0$ 에서 $k<8$
$f(5)=-5+k<0$ 에서 $k<5$
$\therefore$ $k<5$ $\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.