1. 120 을 소인수분해한 것 중 알맞은 것은?

① $2^3 \times 3 \times 5$ ② $4^2 \times 3 \times 5$ ③ $2 \times 6 \times 10$
④ $2^2 \times 6 \times 5$ ⑤ $2^2 \times 3 \times 10$

해설

$$\begin{array}{r|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

2. 다음 중 336 을 소인수분해한 것으로 알맞은 것은?

① $2^3 \times 6 \times 7$ ② $2^2 \times 3 \times 7^2$ ③ $2^4 \times 3 \times 7$
④ $2^2 \times 3^3 \times 7$ ⑤ $4^2 \times 3 \times 7$

해설

2) 336
2) 168
2) 84
2) 42
3) 21
7

$336 = 2^4 \times 3 \times 7$

3. 2160 를 소인수분해하면 $a^x \times b^y \times c^z$ 이다. $z < y < x$ 일 때, $a + b + c - (x + y + z)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$ 이므로 $a = 2,\ b = 3,\ c = 5,\ x = 4,\ y = 3,\ z = 1$ 이다.

$\therefore\ a + b + c - (x + y + z) = 2 + 3 + 5 - (4 + 3 + 1) = 10 - 8 = 2$

4. 196 을 $a^m \times b^n$ 으로 소인수분해하였을 때, $a+b+m+n$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$196 = 2^2 \times 7^2$

따라서 $a = 2,\ b = 7, m = 2, m = 2$

$a+b+m+n = 13$

5. 자연수 300 을 소인수분해 하였을 때, 소인수들의 합을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 24 ⑤ 39

해설

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2,\ 2 + 3 + 5 = 10$

6. 자연수 180을 소인수분해 하였을 때, 소인수들의 곱을 구하면?

① 15 ② 18 ③ 24 ④ 25 ⑤ 30

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

소인수는 2, 3, 5이므로 $2 \times 3 \times 5 = 30$

7. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 15 ④ 21 ⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

8. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600 ② 4900 ③ 6400
④ 8100 ⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.
$140 = 2^2 \times 5 \times 7$
5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.
따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.
$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$

9. $540 \times a = b^2$ 일 때, a 의 값 중 두 번째로 작은 수는? (단, a, b 는 자연수)

① 24 ② 38 ③ 56 ④ 60 ⑤ 72

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
$3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
따라서, 곱할 수 있는 가장 작은 자연수는
$3 \times 5 \times 1^2 = 15$ 이고,
곱할 수 있는 두 번째 작은 자연수는
$3 \times 5 \times 2^2 = 60$ 이다.

10. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$
따라서 n 은
$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$
$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$
$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$
$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$
그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

11. 자연수 $\frac{540}{n}$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 고르면?

① 15, 60, 135, 540
② 5, 60, 180, 540
③ 5, 45, 180, 270
④ 3, 15, 90, 270
⑤ 5, 15, 180, 270

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$,
$\frac{540}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 자연수 n 은
$n = 3 \times 5$, $n = 2^2 \times 3 \times 5$, $3^3 \times 5$, $2^2 \times 3^3 \times 5$ 이다.

12. 24 에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

$24 \times a = b^2$
$2^3 \times 3 \times a = b^2$
$a = 2 \times 3 = 6$
$2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = b^2$
$b = 2^2 \times 3 = 12$
$\therefore a + b = 18$

13. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ $\frac{2}{3}$　　④ $\frac{1}{3}$　　⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$2^4 \times 3 \times x = y^2$

가장 작은 $x = 3$,

$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$

$y = 2^2 \times 3 = 12$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

14. $2^a \times 3^b \times 5^2$ 에 $\frac{2}{3^2}$ 을 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱수가 되었다고 한다. 가능한 a, b 중 가장 작은 자연수를 a, b 라고 할 때, $a+b$는?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 7　　⑤ 8

해설

$2^a \times 3^b \times 5^2 \times \frac{2}{3^2} = 2^{(a+1)} \times 3^{(b-2)} \times 5^2$ 에서 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 만드는 최소의 자연수 a, b 는 $a=1$, $b=2$ 이다.
따라서 $a+b=1+2=3$ 이다.

15. 다음 중 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수가 아닌 것은?

① 5×2^3　　② 80　　③ $2^3 \times 3 \times 5$

④ 125　　⑤ 225

해설

② 80 을 소인수분해하면 $80 = 2^4 \times 5$ 이다. 2^4 은 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수가 아니다.
④ 125 를 소인수분해하면 $125 = 5^3$ 이므로 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수이다.
⑤ 225 를 소인수분해하면 $225 = 3^2 \times 5^2$ 이므로 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수이다.

16. 다음 중 100 의 약수는?

① 30 ② $5^2 \times 7^2$ ③ 80

④ $2^2 \times 5^2$ ⑤ $2^3 \times 5 \times 7$

해설

100 을 소인수분해하면 $100 = 2^2 \times 5^2$ 이다. 이때 2^2 의 약수는 1, 2, 2^2 이고, 5^2 의 약수는 1, 5, 5^2 이다. 다음 표와 같이 2^2 의 약수와 5^2 의 약수를 각각 곱하면 100 의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 이다.

×	1	2	2^2
1	$1\times1=1$	$1\times2=2$	$1\times2^2=4$
5	$5\times1=5$	$5\times2=10$	$5\times2^2=20$
5^2	$5^2\times1=25$	$5^2\times2=50$	$5^2\times2^2=100$

17. 다음 중 약수의 개수가 가장 적은 것은?

① $19^3 \times 31$ ② 2×5^4 ③ $3^2 \times 7 \times 11$
④ $3^2 \times 11^2 \times 13$ ⑤ 19^9

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.
① $(3+1) \times (1+1) = 8$ (개)
② $(1+1) \times (4+1) = 10$ (개)
③ $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ (개)
④ $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ (개)
⑤ $9+1 = 10$ (개)

18. 다음 중 약수의 개수가 나머지 셋과 다른 것을 모두 고르면?

① $2^2 \times 3^3$　　② 24　　③ $2 \times 9 \times 5$

④ 500　　⑤ $3^4 \times 7^3$

해설

① $(2+1) \times (3+1) = 12$ (개)
② $24 = 2^3 \times 3 \Rightarrow (3+1) \times (1+1) = 8$ (개)
③$2 \times 9 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$
$\Rightarrow (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 2 \times 3 \times 2 = 12$ (개)
④ $500 = 2^2 \times 5^3 \Rightarrow (2+1) \times (3+1) = 12$ (개)
⑤ $3^4 \times 7^3 \Rightarrow (4+1) \times (3+1) = 5 \times 4 = 20$ (개)

19. $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 12 개일 때, 자연수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (a+1) = 12$ (개)
즉, $3 \times (a+1) = 12$ 이므로 $a = 3$ 이다.

20. 자연수 135 의 약수의 개수와 $3 \times 5^n \times a^m$ 의 약수의 개수가 같을 때, $n+m$ 의 값은? (단,m, n은 자연수이고, $a \neq 3, 5$인 소수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$135 = 3^3 \times 5$

(약수의 개수) $= 4 \times 2 = 8$(개)

$(1+1) \times (n+1) \times (m+1) = 8$, $n = 1, m = 1$

그러므로 $n + m = 1 + 1 = 2$

21. 약수의 개수가 36 개이고, $2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인가? (단, x, y, z 는 자연수)

① 3 개　② 6 개　③ 9 개　④ 12 개　⑤ 15 개

해설

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로
$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$ 으로 3 개이다.

22. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 <u>없는</u> 수를 모두 고르면?

① 3　　② 4　　③ 7　　④ 9　　⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5+1=6$ (개) 이다.
④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3+1)\times(2+1)=12$ (개) 이다.

23. $A = 3^5 \times \square$ 의 약수가 18 개일 때, □ 안에 들어갈 수 있는 최소의 자연수는?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$A = 3^5 \times \square$ 에서

약수의 개수가 18 개이면 $\square$ 가 가장 작은 소인수 2 일 때

$\square = 2^2 = 4$

24. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
$13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

25. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. x는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x의 값의 개수는?

① 6 개　② 5 개　③ 4 개　④ 3 개　⑤ 2 개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
$(\text{소수})^2$ 이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5 개