1. 부등식 $x^2+x+m \ge 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2+x+m \ge 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=1^2-4m \le 0 \quad \therefore m \ge \frac{1}{4}$
따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

2. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$ ㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

3. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$

② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$

④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

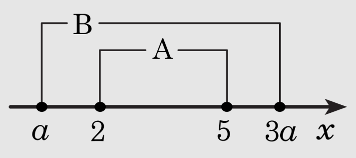
$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로
$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$
$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$
$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$
따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$
$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$
$(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\ (\because 0 < \alpha < \beta)$

4. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$
$x^2 - 7x + 10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

5. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $-1 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

6. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$

$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로

만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \ge 1$

$\therefore$ 모든 실수

$\therefore x = 1$

7. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x \le 0$에서
$x(x-3) \le 0$이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2-5x+4<0$에서
$(x-1)(x-4)<0$이므로
$1<x<4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1<x \le 3$이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a\le -4$이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$ ② $-2 \le x \le 2$ ③ $-1 \le x \le 2$
④ $0 \le x \le 2$ ⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2+x-6 \le 0$ 에서
$(x+3)(x-2) \le 0$
$-3 \le x \le 2 \cdots$ ㈎
$|x-1| \le 3$ 에서
$-3 \le x-1 \le 3$
$-2 \le x \le 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에서 $-2 \le x \le 2$

10. 모든 실수 x 에 대하여 $a(x^2+4) \geq 2x(a+1)$ 이 성립할 때, 실수 a 의 조건은?

① $a < -\frac{1}{3},\ a > 1$ ② $a \leq -\frac{1}{3}$ ③ $a \geq 1$
④ $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ ⑤ $a = 0,\ 1$

해설

주어진 식을 정리하면
$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4a \geq 0$
$a = 0$ 일 때 $f(x) = -2x < 0$ 인 부분이 있고,
$a < 0$ 이면 $f(x) < 0$ 인 부분이 있다.
따라서 모든 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$
$D/4 = (a+1)^2 - 4a^2 \leq 0$
$\therefore\ 3a^2 - 2a - 1 \geq 0$
$(3a+1)(a-1) \geq 0$
$\therefore\ a \geq 1,\ a \leq -\frac{1}{3}$
$a > 0$ 이므로 $a \geq 1$

11. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1<x<2$ 일 때, $bx^2+2cx+5a<0$ 해를 구하면?

① $-1<x<2$ ② $-2<x<3$ ③ $-3<x<4$

④ $-5<x<1$ ⑤ $-5<x<2$

해설

해가 $-1<x<2$ 이므로 $a<0$

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow a(x+1)(x-2)>0$

$\Leftrightarrow ax^2-ax-2a>0$

$\therefore \ b=-a, \ c=-2a$

$bx^2+2cx+5a=-ax^2-4ax+5a<0$

$-a(-a>0)$ 로 양변을 나누면

$x^2+4x-5<0$, $(x-1)(x+5)<0$

$\therefore \ -5<x<1$

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2 　　② -2 　　③ 4 　　④ -4 　　⑤ 0

해설

$f(x)=0 \iff x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \iff 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\iff x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

13. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$ 인 직사각형의 넓이를 $35\,\text{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $9\,\text{cm}$ ② $10\,\text{cm}$ ③ $12\,\text{cm}$ ④ $15\,\text{cm}$ ⑤ $19\,\text{cm}$

해설

한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$ 이다.
$a(12-a) \geq 35$ 에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$
$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $12\,\text{cm}$

14. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$　② $-6 < a < -2$　③ $a \geq 3$, $a \leq -1$
④ $a \geq 0$　⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$
$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$
항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$
$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$
$\Rightarrow -6 < a < -2$

15. 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3$, $n=-2$
$\therefore\ mn=6$

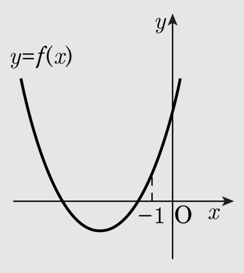
16. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

17. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$
④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로
$k^2+k-6 \ge 0$
$(k+3)(k-2) \ge 0$
$\therefore k \le -3, k \ge 2$
(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서
$-k>1$
$\therefore k<-1$
(iii) $f(1)>0$ 이므로
$1+2k+6-k>0$
$\therefore k>-7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7<k \le -3$

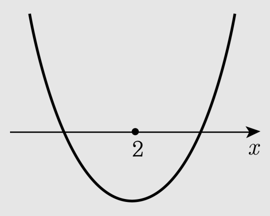
18. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$　　② $m > 1$　　③ $m > -2$

④ $m > 2$　　⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다
작은 근을 가지면 $f(2) < 0$
$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$이므로 $m > 3$



19. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

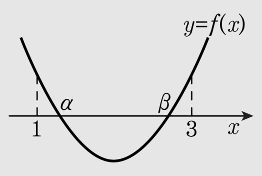
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

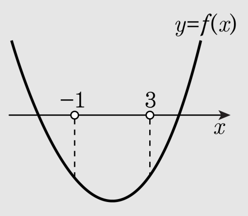
20. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



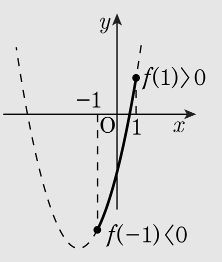
(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

21. 이차방정식 $x^2+4mx-3m=0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m>\frac{2}{9}$ ② $m>\frac{1}{7}$ ③ $m>-\frac{1}{3}$
④ $m<-\frac{1}{3}$ ⑤ $m<\frac{2}{9}$

해설

$f(x)=x^2+4mx-3m$으로 놓을 때,
$f(x)=0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1)=1-4m-3m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{7}$

$f(1)=1+4m-3m>0 \Rightarrow m>-1$

$\therefore\ m>\frac{1}{7}$

22. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　② $2 < a < 5$　③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore D &= a^2 - 4(a+3) \\ &= a^2 - 4a - 12 \\ &= (a-6)(a+2) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a = 6 \ (\because a > 0)$

23. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b의 값을 구하면?

$x^2 - 2x - 3 < 3\lvert x-1\rvert \cdots$ ㉠ $ax^2 + 2x + b > 0 \cdots$ ㉡

① $a = -1,\ b = 15$　② $a = -2,\ b = 14$

③ $a = -3,\ b = 13$　④ $a = -4,\ b = 12$

⑤ $a = -5,\ b = 10$

해설

㉠ 부등식에서 $x \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$

$\therefore x^2 - 5x < 0$ 이므로 $0 < x < 5$

$\therefore 1 \leq x < 5 \cdots$ ㉠

$x < 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$

$x^2 + x - 6 < 0$ 이므로 $(x-2)(x+3) < 0$

$\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-3 < x < 5$

$\therefore a(x+3)(x-5) < 0$

$\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$

$ax^2 + 2x + b > 0$와 일치해야 하므로

$a = -1,\ b = 15$