1. 포물선 $f(x)=ax^2+bx+4$ 는 점 $(-1,4)$ 를 지나고, $g(x)=mx^2+nx+p$ 는 점 $(5,-2)$ 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, 포물선 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\frac{61}{16}\right)$ ② $\left(\frac{1}{2},\frac{31}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\frac{63}{16}\right)$

④ $\left(\frac{1}{2},4\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2},\frac{163}{40}\right)$

해설

두 포물선 $f(x)$, $g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 점 $(-1,4)$ 와 점 $(-5,-2)$ 를 지난다.

$f(x)=ax^2+bx+4$ 에 두 점 $(-1,4),(-5,-2)$ 를 대입하면 $a-b+4=4$ 이므로 $a=b$ 이다.

$25a-5b+4=-2$

$20a=-6$

$a=b=-\frac{3}{10}$

$f(x)=-\frac{3}{10}x^2-\frac{3}{10}x+4=-\frac{3}{10}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{163}{40}$

따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\frac{163}{40}\right)$ 이므로 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{163}{40}\right)$ 이다.

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 (x < 0) \\ 3x^2 (x \geq 0) \end{cases}$ 의 그래프 위의 점 P 와 점 A$(2, 0)$ 에 대하여 삼각형 POA 의 넓이가 24 일 때, 점 P 의 x 좌표들의 곱을 구하면?

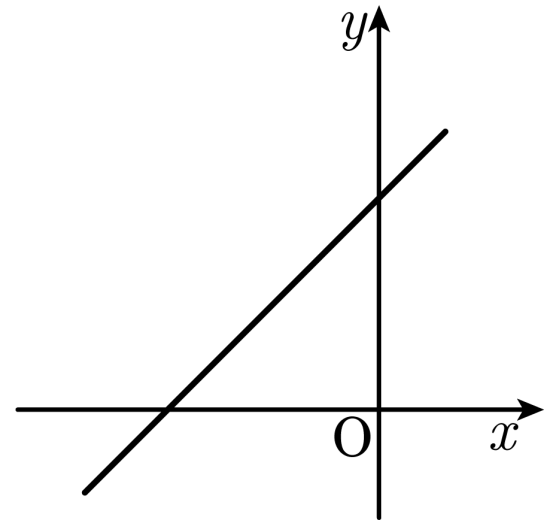
① $-6\sqrt{3}$ ② $-7\sqrt{3}$ ③ $-8\sqrt{3}$

④ $-9\sqrt{3}$ ⑤ $-10\sqrt{3}$

해설

점 P(a, b) 라고 하면 $b > 0$ 이므로 (△POA의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 2 \times b =$ 24 이다.
따라서 $b = 24$ 이다.
P$(a, 24)$ 인 a 의 값을 구하면
(i) $a < 0$ 일 때
$y = x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면
$24 = a^2,\ a = -2\sqrt{6}$
(ii) $a \geq 0$ 일 때
$y = 3x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면
$24 = 3a^2,\ a = 2\sqrt{2}$
(i), (ii) 에서 P$(-2\sqrt{6}, 24)$ 또는 P$(2\sqrt{2}, 24)$ 이다.
따라서 점 P 의 x 좌표들의 곱은
$-2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = -8\sqrt{3}$ 이다.

3. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?



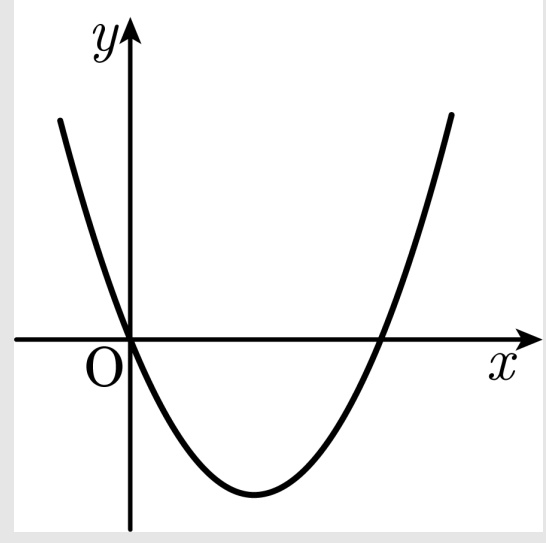
① x 축 위　　② y 축 위

③ 제 1 사분면　　④ 제 2 사분면

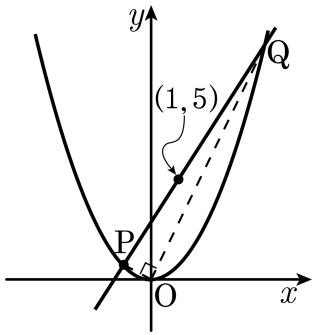
⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



4. 다음 그림과 같이 점 $(1,\ 5)$를 지나는 직선이 포물선 $y = x^2$과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle POQ = 90°$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



① $y = x + 4$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 3x + 2$

④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a라 하면 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $y - 5 = a(x - 1)$

$\therefore y = ax - a + 5$

$y = x^2$, $y = ax - a + 5$의 교점의 x좌표를 α, β라 할 때,

α, β는 방정식 $x^2 = ax - a + 5$, 즉 $x^2 - ax + a - 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉠의 근이다.

점 $P(\alpha,\ \alpha^2)$, $Q(\beta,\ \beta^2)$이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각 $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$이고,

$\overline{PO} \perp \overline{QO}$이므로 $\alpha\beta = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a - 5 = -1$ ($\because$ 근과 계수관계)

$\therefore a = 4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 4x + 1$

5. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠,㉡,㉠ ② ㉠,㉡,㉣ ③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉣,㉤

해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.

따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.