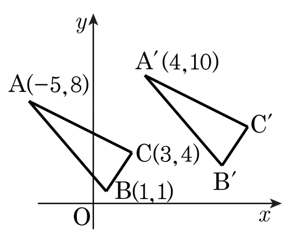
1. 다음 그림의 삼각형 A′B′C′ 은 삼각형 ABC 를 평행이동한 도형이다. 두 점 B′, C′ 을 지나는 직선의 방정식이 $ax+by=24$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle$A′B′C′ 는 $\triangle$ABC 를 x 축 방향으로 9 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 B′(10, 3), C′(12, 6) 이다.
두 점 B′, C′ 를 지나는 직선의 방정식은
$y-3=\frac{6-3}{12-10}(x-10)$
$3x-2y=24$,
$\therefore a+b=1$

2. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$　② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$　③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$　⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
$\left(x^2 + 6x + 9\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = 12$
$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3+2, 2-3) = (-1, -1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

3. 평행이동 $f : (x,\ y) \rightarrow (x-a^2,\ y-a)$ 에 의하여 직선 $3x+2y=1$ 이 직선 $3x+2y=0$ 으로 이동되었다. 이때, 양수 a 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 $3x+2y=1$ 의 $x,\ y$ 에 각각

$x-(-a^2)=x+a^2,\ y-(-a)=y+a$ 를 대입하면

$3(x+a^2)+2(y+a)=1$

$3x+2y=1-2a-3a^2$

$\therefore\ 1-2a-3a^2=0$

$(3a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0)$

4. 점 $(3, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(-5, -2)$ ② $(-2,\ 4)$ ③ $(-1, 3)$
④ $(0, 1)$ ⑤ $(4, 7)$

해설

점 $(3, 1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}}$ 점 $(3, -1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에 대하여}}$ 점 $(-1, 3)$

5. 원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 시켜 얻어진 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시켰더니 x 축에 접하였다. 이 때, p 의 값은?

① 0　　② ± 1　　③ ± 2　　④ ± 3　　⑤ ± 4

해설

원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동 시키면 $y^2 + (x-3)^2 = 1$ 이 된다.
이 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동
시킨다고 했으므로 구하는 도형의 방정식은
$(y-p)^2 + (x-3)^2 = 1$ 이다.
이 도형이 x 축에 접한다고 했으므로
p 는 ± 1

6. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

① $\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$　② $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$　③ $(0,\ 2)$
④ $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $(2,\ 5)$

해설

$y = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \cdots$ ㉠
$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 \cdots$ ㉡
포물선 ㉠, ㉡의 꼭짓점의 좌표는
각각 $(3,\ 1)$, $(1,\ -4)$ 이고
두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로
점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.
$\frac{3+1}{2} = 2$, $\frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$
따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

7. 직선 $2x+ay+b=0$ 에 대하여 점 $A(3,2)$ 와 대칭인 점을 $B(-1,0)$ 이라고 할 때, 상수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 점 $A(3,2)$, $B(-1,0)$ 에 대하여
$\overline{AB}$ 의 중점 $(1,1)$ 이
직선 $2x+ay+b=0$ 위에 있으므로
$2+a+b=0 \cdots$ ㉠
직선 AB 와 직선 $2x+ay+b=0$,
즉 $y=-\frac{2}{a}x-\frac{b}{a}$ 가 수직이므로
$\frac{2-0}{3-(-1)}=\frac{a}{2}$
$\therefore a=1$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-3$
$\therefore ab=-3$

8. 점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동에 대하여 직선 $y = -2x + k$ 로 옮겨질 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동을
$T : (x, y) \to (x + m, y + n)$ 이라고 하면,
$(1, 2) \xrightarrow{T} (-2, -1)$ 에서
$1 + m = -2, 2 + n = -1 \quad \therefore m = -3, n = -3$
$\therefore T : (x, y) \to (x - 3, y - 3)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -3 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 옮기는 평행이동이다.
평행이동 $T : (x, y) \to (x - 3, y - 3)$ 에 의하여
직선 $y = -2x + k$ 는
직선 $y + 3 = -2(x + 3) + k$ 로 옮겨진다.
이 때, 이 직선이 원점을 지나므로
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$3 = -6 + k \quad \therefore k = 9$

9. 평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

10. 점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(2,\ -1)$　　② $(-1,\ -2)$　　③ $(1,\ 2)$

④ $(-2,\ 4)$　　⑤ $(-1,\ 3)$

해설

점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$

11. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 과 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=1$　② $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$　④ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

⑤ $x^2+y^2=1$

해설

$y=-x$ 에 대해 대칭이므로
원의 방정식에 x 대신 $-y$ 를, y 대신 $-x$ 를 대입 한다.

$\Rightarrow\ (-y-1)^2+(-x+2)^2=1$

$\Rightarrow\ (x-2)^2+(y+1)^2=1$

12. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1,a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2$　　$\therefore a=1$

13. 점$(-1,\ 4)$ 를 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동한 점이 $(5,\ 2)$ 일 때, ab 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

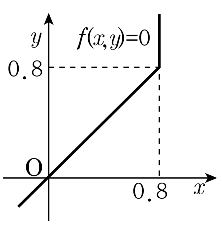
해설

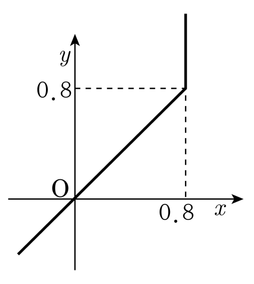
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 가 두 점 $(-1,\ 4)$, $(5,\ 2)$ 를 이은 선분의 중점이므로

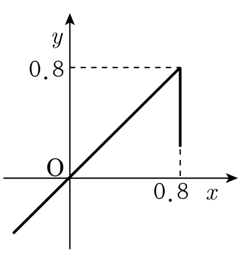
$(a,\ b)=\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(2,\ 3)$

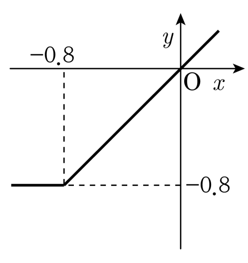
$\therefore\ a=2,\ b=3\ \therefore\ ab=6$

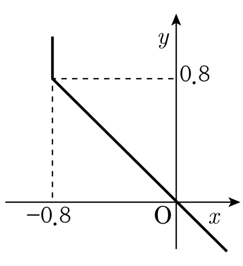
14. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y, -x) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

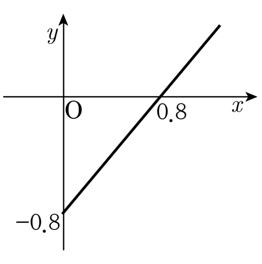


①


②


③


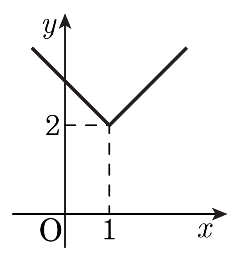
④


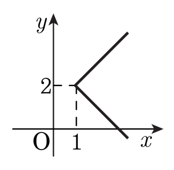
⑤


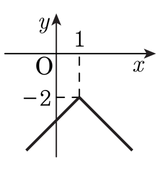
해설

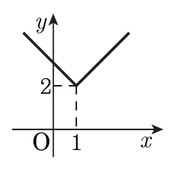
$f(-y, -x) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을
직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

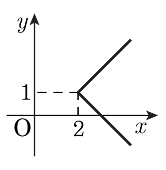
15. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?

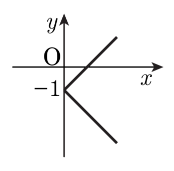


①


②


③


④


⑤


해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.
따라서 (1, 2) 는 (2, 1) 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

16. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

17. 점 $\mathrm{A}(a, b)$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라고 하면 두 점 A, B 를 지나는 직선은 x 축에 평행하다. 이때, 선분 AB 의 길이는?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을
A′ 라고 하면 $\mathrm{A}'(a+3, b+2)$
다시 점 A′ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
점 B 는 $\mathrm{B}(b+2, a+3)$
이때, 직선 AB 가 x 축에 평행하므로
두 점 A, B 의 y 좌표가 서로 같다.
즉, $b = a + 3$　　$\therefore \mathrm{B}(a+5, a+3)$
따라서, 선분 AB 의 길이는
두 점 A, B 의 y 좌표의 차와 같으므로
$\overline{\mathrm{AB}} = (a+5) - a = 5$

18. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(3,\ -1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $2x-y+k=0$ 은 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나는 직선으로 옮겨진다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

점 $(1,2)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
점 $(3,-1)$ 로 옮겨진다.
따라서, 이러한 평행이동에 의하여
직선 $2x-y+k=0$ 을 옮기면
$2(x-2)-(y+3)+k=0$
$\therefore 2x-y+k-7=0$
이 직선이 점 $(-1,3)$ 을 지나므로
$2\cdot(-1)-3+k-7=0$
$\therefore k=12$

19. 점 $\mathrm{P}(2,3)$ 를 직선 $x+y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(-2,-1)$ ② $(2,-1)$ ③ $(-2,1)$

④ $(0,1)$ ⑤ $(2,5)$

해설

대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'=(a,b)$ 라 하면,

i) $\overline{\mathrm{PP}}'$ 의 기울기는 $y=-x+3$ 에 수직이므로 1 이다.

$\Rightarrow \dfrac{b-3}{a-2}=1 \quad \cdots$ ㉠

ii) P,P' 의 중점은 $y=-x+3$ 위에 있다.

$\Rightarrow \dfrac{2+b}{2}=-\dfrac{(3+a)}{2}+3 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 를 연립하면, $a=0, b=1$

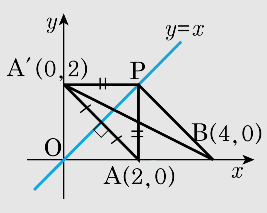
$\therefore \mathrm{P}'=(0,1)$

20. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$



이때, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$