

1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -1$ (증근), $-\frac{1}{2}$, 2

② $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 2

④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (증근)

⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (증근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$
이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

	2	-1	-6	-1	2
-1		-2	3	3	-2
	2	-3	-3	2	0
2		4	2	-2	
	2	1	-1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$$

$$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$$

2. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$

② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$

④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

1		1	0	0	-4	3
			1	1	1	-3
1		1	1	1	-3	0
			1	2	3	
		1	2	3	0	

$$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1 \pm \sqrt{2}i$$

3. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$
이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은 $(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$$\therefore x = 2, x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

두 허근의 합은 -1

4. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

5. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{가장 작은 근 } a = -\sqrt{6}, \text{ 가장 큰 근 } b = \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

6. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$

(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$

④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$

② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

7. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

8. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{6}$

해설

$$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$$

$$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$$

9. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

② $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

③ $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1

⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0$$

$$x^2+x+2=0 \text{ 의 근 : } \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\therefore \text{ 해 : } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

10. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

② $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$

④ $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2, x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	-2	2	2	-3
		1	-1	1	3
-1	1	-1	1	3	0
		-1	2	-3	
	1	-2	3	0	

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2-2x+3) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

11. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

12. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

13. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

14. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면

$$X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

15. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

① $1 + i$

② i

③ 0

④ -1

⑤ 24

해설

$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 라 하면

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

16. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

$$(i) \ t = 4 \text{ 일 때, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$(ii) \ t = 9 \text{ 일 때, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 모든 해의 합은

$$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$$

17. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② -4

③ 8

④ -8

⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$ 이므로

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

18. 삼차방정식 $2x^3 + px^2 + qx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 - 2i$ 일 때 $p + q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7

② -7

③ 6

④ -6

⑤ 11

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 두 근을 $1 + 2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱:

$$(1 - 2i)(1 + 2i)\alpha = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{세 근의 합: } -\frac{p}{2} = (1 - 2i) + (1 + 2i) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore p = -5$$

$$\text{두근끼리 곱의 합: } \frac{q}{2} = (1 - 2i)(1 + 2i) + (1 - 2i + 1 + 2i) \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$\therefore q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 한 근은 $1 + 2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

나머지 일차식을 $2x + a$ 라고 하면

$$2x^3 + px^2 + qx - 5 = (2x + a)(x^2 - 2x + 5) \text{ 에서}$$

$a = -1$ 이므로 대입하여 정리하면

$$p = -5, q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

19. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면

$$(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠에서 $\alpha = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$$

$$\alpha = -2 \text{를 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면 } b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

20. 실계수 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \gamma$ 라 하면

$$(1+i)(1-i)\gamma = -2, \quad 2\gamma = -2$$

$$\therefore \gamma = -1$$

$$(1+i) + (1-i) + \gamma = -a = 1$$

$$\therefore a = -1$$

$$(1+i)(1-i) + (1-i)\gamma + \gamma(1+i) = 0, \quad b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$