1. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

2. x에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore \ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$　② $k > 3$　③ $k \le 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$\therefore\ k > 3$

4. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

5. x에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이므로

$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$

$(k-3)^2 = 0$

$\therefore\ k = 3$

6. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

7. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

8. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

10. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$의 해가 존재하지 않기 위한 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$이면 해가 없다.

11. 다음 보기는 방정식 $(ax-1)a = x-1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a=-1$ 이면 해가 없다.

㉡ $a=1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax-1)a = x-1$ 에서

$(a^2-1)x = a-1$

$(a-1)(a+1)x = a-1$

㉠ $a=-1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.

㉡ $a=1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \dfrac{1}{a+1}$

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

12. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$ 의 두 근의 합은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 6

해설

$|x-1|$이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서

$x-1\geq 0,\ x-1<0$으로 구간을 나누면

i) $x\geq 0$ 일 때, $|x-1|=x-1$

$(x-1)^2+(x-1)-6=0$

$(x-3)(x+2)=0\quad\therefore\ x=-2,\ 3$

하지만 $x\geq 0$이므로 $x=3$

ii) $x<0$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$

$(x-1)^2-(x-1)-6=0$

$(x-4)(x+1)=0\quad\therefore\ x=-1,\ 4$

하지만 $x<0$이므로 $x=-1$

$\therefore$ 두 근의 합은 $3+(-1)=2$

13. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

14. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$의 해는?

① $-2,\ 4$ ② $-2,\ 2$ ③ $-4,\ 4$

④ $-4,\ 2$ ⑤ $-4,\ -2,\ 2,\ 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$에서

i) $x > 0$일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x+4)(x-2) - 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x-4)(x+2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2,\ 2$

15. $1 < x < 3$ 인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$

④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$

준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$

그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.

(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$

준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는

$x = 1 + \sqrt{3}$

16. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

17. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

18. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$

② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$

⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

19. $x^2+2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}>0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

20. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1$,

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

21. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12　② -12　③ 15　④ -15　⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$$
$$=(b-a)\omega+(12-2a)$$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0\ (\because\ \omega$는 허수$)$

$\therefore\ a=6,\ b=9$

22. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$$

$$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$$

양변에 -1을 곱하면

$$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$$

$$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab&=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\&=(-1)^3-3ab(-1)-3ab\\&=-1\end{aligned}$$

23. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$
$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가
$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$\begin{aligned}D&=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)\\&=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8\\&=(1-4a)y^2-2y+9\end{aligned}$$

에서

$$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

24. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=2a+1,\ \ (\alpha+\beta)\alpha\beta=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=2a+1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

$ab=2 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣를 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$ 또는 $a=-2,\ b=-1$

25. 이차방정식 $f(2x+1)=2$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=4$가 성립한다. 이 때, $3f(x)-2=4$의 두 근의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=2$

$\therefore a(4x^2+4x+1)+b(2x+1)+c-2=0$

$4ax^2+4ax+a+2bx+b+c-2=0$

$4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c-2=0$

따라서 두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{-(4a+2b)}{4a}=4$

$\therefore 4a+2b=-16a,\ \ 2b=-20a$이므로

$b=-10a$

$3f(x)-2=4$이므로 $3f(x)=6$

$\therefore f(x)=2 \quad \therefore ax^2+bx+c-2=0$에서

두 근의 합 $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-10a}{a}=10$