1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4이다.

2. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2\qquad\therefore\ a+b=2+1=3$

3. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$ ② $2x-2y+3=0$

③ $2x-2y-3=0$ ④ $2x+2y-3=0$

⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

4. 방정식 $x^2+y^2-7y=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2+x-x+2=0$

② $x^2+y^2-2x-3y+5=0$

③ $x^2+y^2-8x-3y+6=0$

④ $2x^2+y^2-9x+4y+3=0$

⑤ $4x^2+y^2+2x-y+9=0$

해설

$(x-4)^2+(y+2)^2-7(y+2)=0$

$\therefore x^2+y^2-8x-3y+6=0$

5. 직선 $y=2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a-4b$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a,b)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이므로 $\mathrm{R}(b,a)$ 이고
Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로
$\mathrm{Q}(b-1,a)$ 이다.
또, P 와 Q 는 $y=2x$ 에 대하여 대칭이므로
$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y=2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y=2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$=\frac{b-a}{a-b+1}=-\frac{1}{2}\cdots$① 이고,
$\frac{a+b}{2}=2\left(\frac{a+b-1}{2}\right)\cdots$②
①에서 $a-b=1$
②에서 $a+b=2$
$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$, $2a-4b=3-2=1$

6. k의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k+2)y - (k^2 - 4)z = 28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x + y + z$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$

$\therefore\ 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$

$z = 2x,\ y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$에 대입하면

$x = 2,\ y = -6,\ z = 4$

$\therefore\ 3x + y + z = 4$

7. 두 다항식 $f(x)=x^2+x+a$, $g(x)=2x^2+bx-1$ 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)(2x-1)$ ② $(x-1)(x+1)(2x-1)$
③ $(x-1)(x+2)(2x+1)$ ④ $(x-1)(x+2)(x+3)$
⑤ $(x-1)(x+2)(x-2)$

해설

$f(1)=0, 1+1+0=a \ \therefore\ a=-2$
$g(1)=0, 2+b-1=0 \ \therefore\ b=-1$
$\therefore\ f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$
$g(x)=2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$
$\therefore$ 최소공배수 : $(x-1)(x+2)(2x+1)$

8. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라
합: $(1+i)+(1-i)+\alpha=3, \alpha=1 \cdots$ ㉠
곱: $(1+i)(1-i)\alpha=2\cdot(1)=-b,\ \ b=-2\cdots$ ㉡
$a=(1+i)(1-i)+1(1-i)+1(1+i)=2+1-i+1+i=4$
$a+b=4-2=2$

9. 연립부등식을 풀어서 범위를 구했을 때, 가장 많은 자연수를 포함하는 연립부등식을 골라라.

㉠ $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} < -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ 3.5x + 0.5 \ge -\dfrac{x+3}{2} \end{cases}$

㉡ $\begin{cases} 0.3x + 1.4 \ge 0.2(x+5) \\ 4(0.2x - 1.3) < -0.5x \end{cases}$

㉢ $\begin{cases} -\dfrac{5x+2}{3} < -2x \\ 2(x-1) > \dfrac{5x-9}{3} \end{cases}$

㉣ $\begin{cases} -1.2(x-2) < 0.1x - 1.5 \\ 2(x-1) > \dfrac{x-9}{2} \end{cases}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} < -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ 3.5x + 0.5 \ge -\dfrac{x+3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3 < -x + 6 \\ 7x + 1 \ge -x - 3 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x < 3 \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$-\dfrac{1}{2} \le x < 3$ 이므로 자연수는 1, 2 로 2 개

㉡ $\begin{cases} 0.3x + 1.4 \ge 0.2(x+5) \\ 4(0.2x - 1.3) < -0.5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 14 \ge 2(x+5) \\ 4(2x - 13) < -5x \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x \ge -4 \\ x < 4 \end{cases}$

$-4 \le x < 4$ 이므로 자연수는 1, 2, 3 으로 3 개

㉢ $\begin{cases} -\dfrac{5x+2}{3} < -2x \\ 2(x-1) > \dfrac{5x-9}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x - 2 < -6x \\ 6x - 6 > 5x - 9 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases}$

$-3 < x < 2$ 이므로 자연수는 1 로 1 개

㉣ $\begin{cases} -1.2(x-2) < 0.1x - 1.5 \\ 2(x-1) > \dfrac{x-9}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12(x-2) < x - 15 \\ 4(x-1) > x - 9 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x > 3 \\ x > -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

$x > 3$ 이므로 자연수는 무수히 많다.

10. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$ 의 해가 $-2<x<3$ 일 때, 이차부등식 $x^2-ax+b<0$ 의 해는?

① $-3<x<2$ ② $-2<x<3$ ③ $2<x<3$
④ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=(x+2)(x-3)<0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-6$
$x^2-ax+b=x^2+x-6$
$=(x-2)(x+3)<0$
$\therefore\ -3<x<2$

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4>0 \\ 2x^2+(7-2a)x-7a<0 \end{cases}$

을 만족하는 정수가 -3한 개뿐일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-3<a\le 3$ ② $-3<a\le 2$ ③ $-2<a\le 7$
④ $0<a\le 7$ ⑤ $7<a\le 10$

해설

$x^2-4>0$에서
$(x+2)(x-2)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>2\cdots$ ㉠
$2x^2+(7-2a)x-7a<0$에서
$(2x+7)(x-a)\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 동시에 만족하는 정수가
-3뿐이어야 하므로
a가 취할 수 있는 범위는 $-3<a\le 3$이다.

12. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

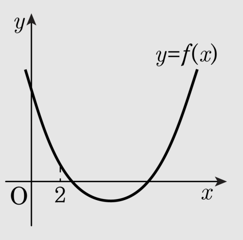
보기

(ⅰ) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ⅱ) 2가 두 근 사이에 있다.

① $8 \le m < 10$, $m > 10$　② $8 \le m < 10$, $m > 8$
③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$
⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

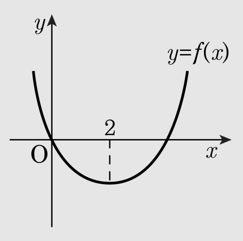
해설

(ⅰ) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ⅱ)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

13. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$　　② $m > 1$　　③ $m > -2$

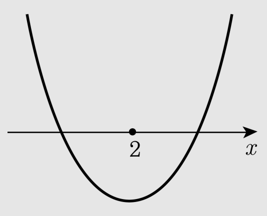
④ $m > 2$　　⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다

작은 근을 가지면 $f(2) < 0$

$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$이므로 $m > 3$



14. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+y^2=5$　② $(x+2)^2+y^2=5$

③ $(x-2)^2+y^2=25$　④ $(x+1)^2+y^2=25$

⑤ $(x+2)^2+y^2=25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$,
반지름의 길이를 r 라 하면,
원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$ $\cdots$ ㉠
이 원이 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나므로,
$x=-1,\ y=4$ 를 ㉠ 에 대입하면,
$(-1-a)^2+4^2=r^2$
$\therefore\ a^2+2a+17=r^2$ $\cdots$ ㉡
$x=6,\ y=3$ 을 ㉠ 에 대입하면,
$(6-a)^2+3^2=r^2$
$\therefore\ a^2-12a+45=r^2$ $\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ 을 하면, $14a-28=0$,　$\therefore\ a=2$
$a=2$ 를 ㉡ 에 대입하면, $r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=25$

15. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\frac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

16. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

① + ②에 의해

$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

17. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{16}{27}$

해설

$y=a(x+3)^2+4$
$=a(x^2+6x+9)+4$
$=ax^2+6ax+9a+4$

$9a+4=2,\ 9a=-2$ 이므로 $a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$\therefore abc=\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{27}$

18. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2$, $c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

19. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

20. A(1, 5), B(7, −1), P(x, y) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$

④ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 12$

⑤ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

해설

$\overline{\mathrm{AP}}$ 의 기울기 : $\dfrac{y-5}{x-1}$

$\overline{\mathrm{BP}}$ 의 기울기 : $\dfrac{y+1}{x-7}$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 −1 이다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{y-5}{x-1} \times \dfrac{y+1}{x-7} = -1$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y - 5 = -x^2 + 8x - 7$

$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

21. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=2$를 만족시키는 복소수$z$는? (단, $\overline{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.
② 한 개 있다.
③ 두 개뿐이다.
④ 무수히 많이 있다.
⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=2$ 에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 쌍은 무수히 많다.

22. $2x+y=a+2$, $x+2y=8(a+2)$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$2x+y=a+2\cdots$①
$x+2y=8(a+2)\cdots$②
$2\times$① $-$ ② 을 하면
$3x=-6a-12$, $x=-2a-4$
$x=-2a-4$ 를 ①에 대입하면
$y=5a+10$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (-2a-4)^2+(5a+10)^2 \\ &= 4a^2+16a+16+25a^2+100a+100 \\ &= 29a^2+116a+116 \\ &= 29(a+2)^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 0

23. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 α 는 $f(x)+1=0$ 의 한 정수근이고 β 는 $f(x)-1=0$ 의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$ 이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d 는 정수) 로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$ 는 2 의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ±2

24. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2\ldots$㉠

$x^2+y^2+z^2=14\ldots$㉡

$x^3+y^3+z^3=20\ldots$㉢

㉠, ㉡에서

$xy+yz+zx=-5\ldots$㉣

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=20$

$\therefore xyz=-6\ldots$㉤

㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$

$t=1,\ -2,\ 3$

$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$

$\therefore\ x-2y+z=-1$

25. 세 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{C}(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\angle\mathrm{C}$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $\mathrm{D}(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ 에서
$\overline{\mathrm{AD}} : \mathrm{BD} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로
$\mathrm{D}(a,b) = \left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = \left(\frac{8}{3},\ 1\right)$
$\therefore\ 3ab = 8$