**1.** $f$ 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

㉠ $f(2n) = 2 \cdot f(n)(n = 1, 2, 3, \cdots)$

㉡ $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

이때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

**2.** 다음은 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

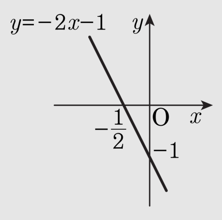
① $y=-x^2$　　② $y=-|x|$

③ $y=3$　　④ $y=-2x-1$

⑤ $y=\sqrt{2}x-2\ (x\ge 1)$

해설

① $-1\ne 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=-1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.




또, $f(X)\le 0$ 이므로 (공역)$\ne$ (치역)
② $-1\ne 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=-1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X)\le 0$ 이므로 (공역)$\ne$ (치역)
③ 모든 $x\in X$ 에 대하여 $f(x)=3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X)=3$ 이므로 (공역)$\ne$ (치역)
④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로
일대일대응이다.
⑤$x\ge 1$ 일 때, $f(X)\ge 0$ 이므로
일대일 함수이지만 (공역)$\ne$ (치역) 이다.

**3.** 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $A$에서 $A$로의 함수 $f$ 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 $f^{-1}$가 존재하므로, $f$는 일대일대응이다.

( i ) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

( ii ) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

( i ), ( ii ), (iii)에서 함수 $f$의 개수는 4개이다.

**4.** 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 $f$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 　　　　　　　　　　개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

**5.** 두 함수 $f,\ g$가 $f(x) = 2x - 3,\ g(2x-1) = -6x + 5$를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$의 값은? (단, $f \circ g$는 $g$와 $f$의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ −15 ④ −24 ⑤ −29

해설

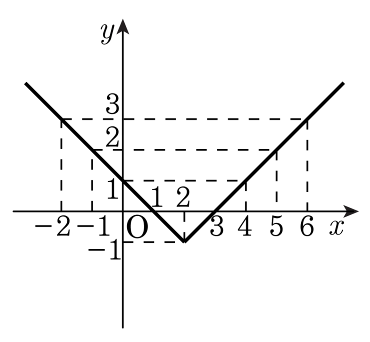
$(f \circ g)(5) = f(g(5))$

$2x - 1 = 5$에서 $x = 3$이므로

$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$

$\therefore\ (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$

**6.** 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



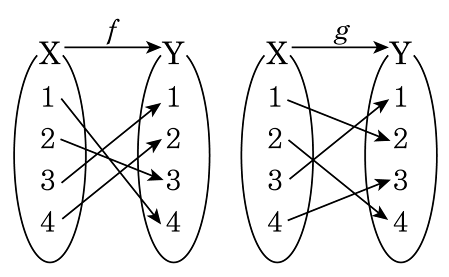

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

**7.** 두 함수 $f$, $g$ 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 $h$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?




① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 $f$ 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$\therefore\ g \cdot f^{-1}$

$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$

$= h \cdot I = h$

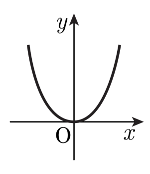
$\therefore\ h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$

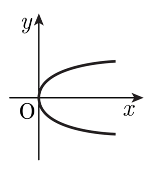
$= g(f^{-1}(2))$

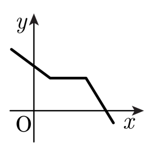
$= g(4)(\because\ f^{-1}(2) = 4)$

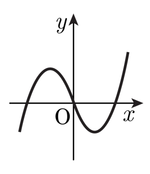
$\therefore\ g(4) = 3$

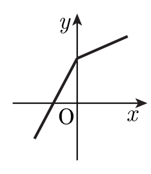
**8.** 다음 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프로서 적당한 것은 무엇인가?

①



②



③



④



⑤



해설

주어진 그래프 중 일대일대응인 것을 찾으면 ⑤이다.

**9.** 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$ , $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

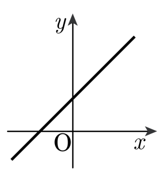
▶ 답:

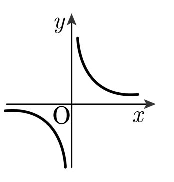
▷ 정답: 0

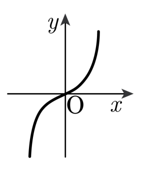
해설

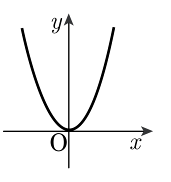
$f(2) = 2a + b = 1,\ \ f(1) = a + b = 2$
연립하면 $a = -1,\ b = 3$
$\therefore\ f(3) = 3a + b = 0$

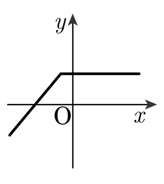
**10.** 다음 중 임의의 실수 $x$에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

①



②



③


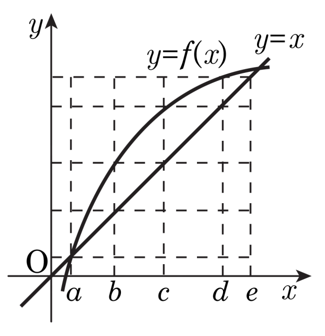

④



⑤



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$이다.
그런데 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족하려면
함수 $f(x)$는 일대일 대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이어야 한다.

**11.** 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?




① $a$　　② $c$

③ $a + b - c$　　④ $a + c - e$

⑤ $a + b + c - d - e$

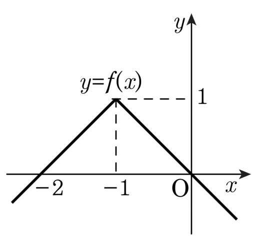
해설

$f(d) = e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a$

$\Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$

$\therefore\ a + c + d - c - d = a$

**12.** 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?




① $y = |x-1| - 1$

② $y = |x+1| - 1$

③ $y = |x-1| + 1$

④ $y = -|x+1| + 1$

⑤ $y = -|x+1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
$x$ 축의 방향으로 $-1$ 만큼,
$y$ 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 $x$ 대신 $x+1$ ,
$y$ 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1| + 1$ 이므로 $y = -|x+1| + 1$

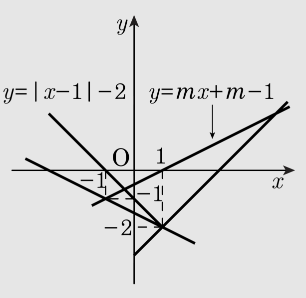
**13.** 함수 $y = |x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 $m$ 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$ ② $-\frac{1}{2} < m < 1$ ③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

④ $0 < m < 1$ ⑤ $1 < m < 2$

해설

$y = |x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.




또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x+1) - 1$ 에서 $m$ 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$

**14.** $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $y = 2|x-1| + x$ 의 최댓값을 $M$ , 최솟값을 $m$ 이라 할 때, 상수 $M$ , $m$ 의 합 $M+m$ 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$y = 2|x-1| + x$ 에서
( i ) $x \ge 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$
( ii ) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) + x = -x + 2$ 이므로
$0 \le x \le 3$ 에서 $y = 2|x-1| + x$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7 , $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로
$M + m = 7 + 1 = 8$

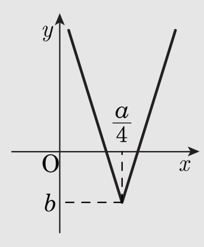
**15.** 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 $a$, $b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, $y$ 축의 방향으로 $b$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 $b$ 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \qquad \therefore\ a + b = 10$

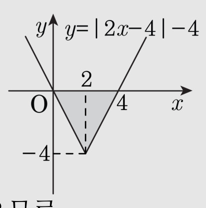
**16.** 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0 으로 하는 $x$ 의 값은




$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

( i ) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

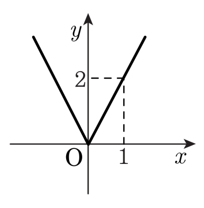
( ii ) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

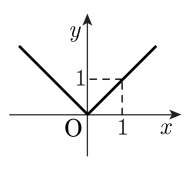
따라서 ( i ), ( ii ) 에 의하여

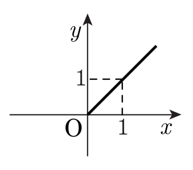
함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

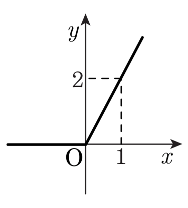
구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

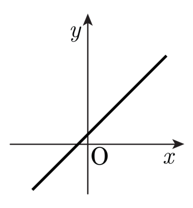
**17.** 다음 중 함수 $y = x + |x|$의 그래프는?

①



②



③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서
$x \le 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고
$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

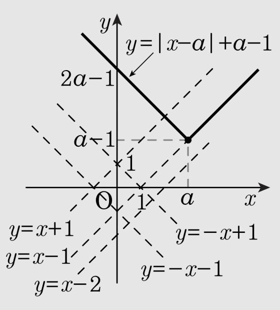
**18.** 다음 중 임의의 실수 $a$ 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

① $y=x+1$　② $y=x-1$　③ $y=x-2$
④ $y=-x-1$　⑤ $y=-x+1$

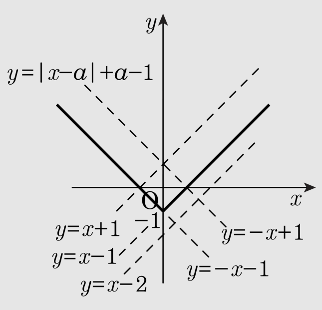
해설

$a$ 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

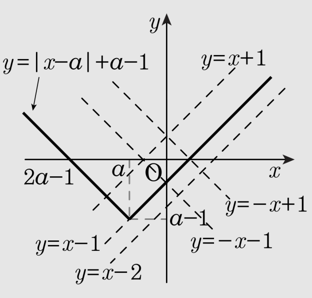
ⅰ) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.




ⅱ) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.




ⅲ) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.




ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

**19.** 함수 $f(x)=||x-2|+1|$ 에 대하여 $f(-1)-f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(-1)=||-1-2|+1|=4$

$f(3)=||3-2|+1|=2$ 이므로

$\therefore\ f(-1)-f(3)=2$

**20.** 함수 $y=|x+1|-|x-3|$ 의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$ 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|x+1|-|x-3|$ 에서

i ) $x<-1$ 일 때

$y=-(x+1)+x-3=-4$

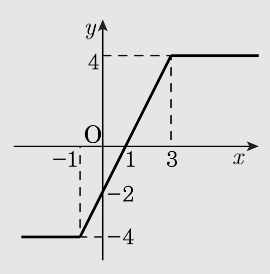
ii ) $-1 \le x<3$ 일 때

$y=x+1+x-3=2x-2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y=x+1-(x-3)=4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로




$M=4, m=-4$

$\therefore M-m=4-(-4)$

$=8$