

1. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} f(2n) = 2 \cdot f(n) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\textcircled{\text{㉡}} f(2n + 1) = (-1)^n \cdot 2 (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

2. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

① $y = -x^2$

② $y = -|x|$

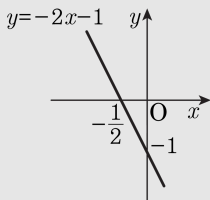
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로
일대일대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로

일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역) 이다.

3. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 211개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

5. 두 함수 f, g 가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x - 1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

① 18

② 12

③ -15

④ -24

⑤ -29

해설

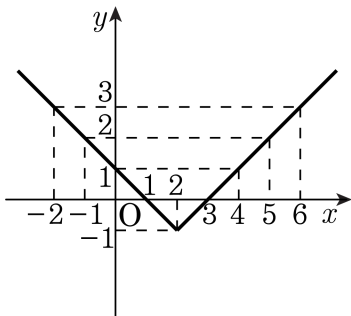
$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면

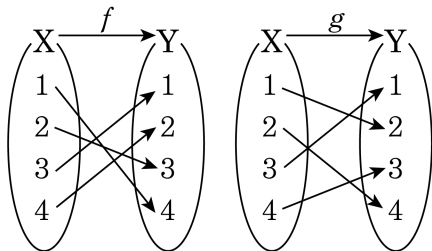
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$

$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$

$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$

따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

7. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\therefore g \cdot f^{-1}$$

$$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$$

$$= h \cdot I = h$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

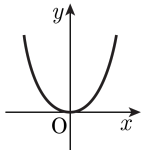
$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

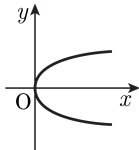
$$\therefore g(4) = 3$$

8. 다음 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프로서 적당한 것은 무엇인가?

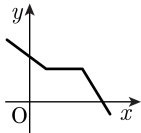
①



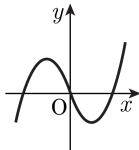
②



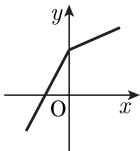
③



④



⑤



해설

주어진 그래프 중 일대일대응인 것을 찾으면 ⑤이다.

9. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

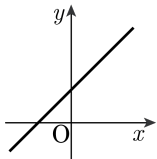
$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

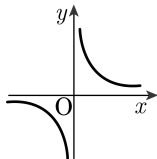
$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

10. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

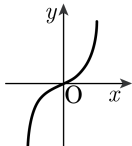
①



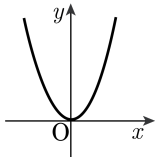
②



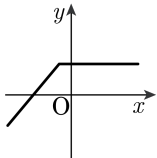
③



④



⑤



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

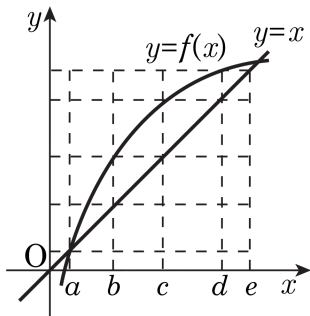
그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면

함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

11. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?



① a

② c

③ $a + b - c$

④ $a + c - e$

⑤ $a + b + c - d - e$

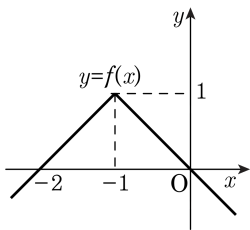
해설

$$f(d) = e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a$$

$$\Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$$

$$\therefore a + c + d - c - d = a$$

12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x - 1| - 1$

② $y = |x + 1| - 1$

③ $y = |x - 1| + 1$

④ $y = -|x + 1| + 1$

⑤ $y = -|x + 1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$y = -|x|$ 에 x 대신 $x + 1$,

y 대신 $y - 1$ 을 대입하면 $y - 1 = -|x + 1|$

즉, $f(x) = -|x + 1| + 1$ 이므로 $y = -|x + 1| + 1$

13. 함수 $y = |x - 1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$

② $-\frac{1}{2} < m < 1$

③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

④ $0 < m < 1$

⑤ $1 < m < 2$

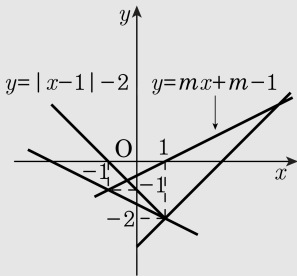
해설

$y = |x - 1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1, -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나기 위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



14. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

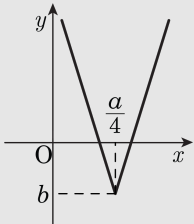
15. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

16. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$$2x - 4 = 0 \text{ 에서 } x = 2$$

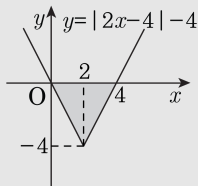
$$(i) \ x < 2 \text{ 일 때, } y = -(2x - 4) - 4 = -2x$$

$$(ii) \ x \geq 2 \text{ 일 때, } y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

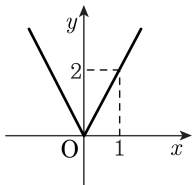
함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$\text{구하는 도형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

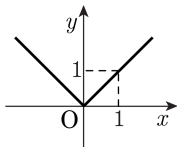


17. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

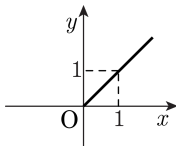
①



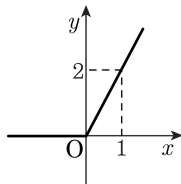
②



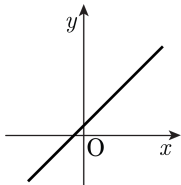
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

18. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$

② $y = x - 1$

③ $y = x - 2$

④ $y = -x - 1$

⑤ $y = -x + 1$

해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

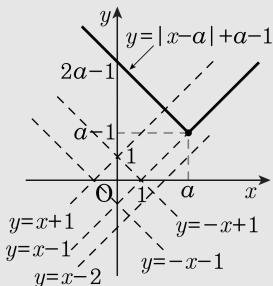
i) $a > 0$ 일 때,

$y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서, $y = |x - a| + a - 1$ 은 $y = x + 1$,

$y = x - 1$ 과 만나며 $a \leq 1$ 일 때

$y = -x + 1$ 도 만난다.

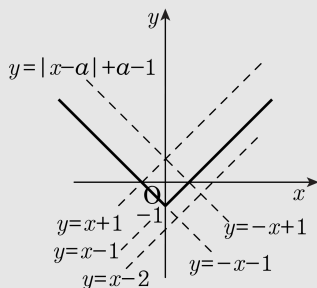


ii) $a = 0$ 일 때,

$y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과

만나지 않는 그래프는 $y = x - 2$ 밖에 없다.

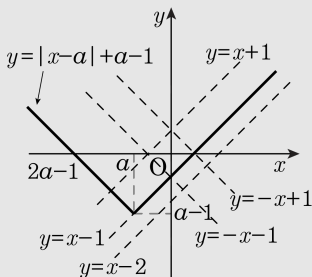


iii) $a < 0$ 일 때,

$y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과 만나지 않는

그래프는 $y = x - 2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y = x - 2$ 이다.

19. 함수 $f(x) = ||x - 2| + 1|$ 에 대하여 $f(-1) - f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(-1) = ||-1 - 2| + 1| = 4$$

$$f(3) = ||3 - 2| + 1| = 2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f(-1) - f(3) = 2$$

20. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$

