1. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

2. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \;\Rightarrow\; x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \;(\because k > 0)$

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$
$\therefore\ k=3$

4. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$는 $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$을 만족한다. $f(x)$를 $x - 4$로 나누었을 때 나머지는?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 2

해설

$f(1) = 1 + a + b + c = 2$
$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$
$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$
세 식을 연립하면,
$a = -6, b = 13, c = -6$
$\therefore\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$
$\therefore\ f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$

5. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

> 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ (a,b,c는 실수) 에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 두고 $x=1+2i$를 대입하면 $f(1+2i)=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11-3a+b+c)+(-2+4a+2b)i=0$
> a,b,c 가 실수이므로 이제 $x=1-2i$ 를 대입하면 $f(1-2i)=(1-2i)^3+a(1-2i)^2+b(1-2i)+c=(-11-3a+b+c)-(-2+4a+2b)i=0$
> 따라서 (　　(가)　　)

(가) 에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

① 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 이면, $1-2i$ 도 근임을 알 수 있다.
② 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 이면, $1+2i$ 도 근임을 알 수 있다.
③ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 라고 해서, 반드시$1-2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
④ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 라고 해서, 반드시$1+2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
⑤ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x=1+2i$ 를 대입한 결과와 $x=1-2i$를 대입한 결과가 같다.

6. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$w^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω

$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$

$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$

$= w^2 + w + 1$

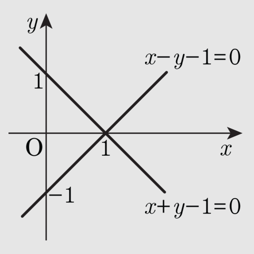
$= 0$

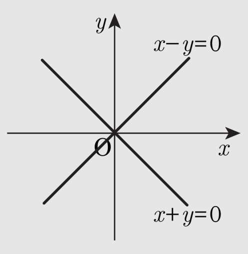
7. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다.　② 0 개　③ 1 개
④ 2 개　⑤ 4 개

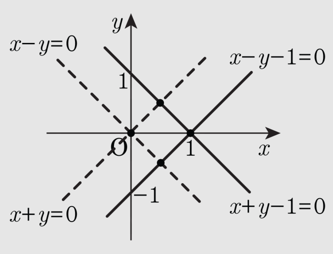
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0, x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = 1$

$\therefore\ y = \pm 1, x = \mp 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore\ y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

9. $a+b+c=0$일 때, 다음 중 $2a^2+bc$와 같은 것은?

① $(a-c)^2$ ② $(b+c)^2$ ③ $(a+b)(b+c)$

④ $(a-b)(a-c)$ ⑤ $(a-b)(a+c)$

해설

$2a^2+bc=2a^2-b(a+b)$ $(\because\ c=-a-b)$
$=2a^2-ab-b^2$
$=(a-b)(2a+b)$
$=(a-b)(a+b+a)$
$=(a-b)(a-c)$ $(\because a+b=-c)$

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1}(n = 4k) \\ -i^{n}(n = 4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n = 4k+2) \\ -i(n = 4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1) + f(2) + \cdot \cdot \cdot + f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n = 4k \Rightarrow f(n) = {}^{4k+1} = i$
$n = 4k+1 \;\Rightarrow\; f(n) = -i^{4k+1} = -i$
$n = 4k+2 \;\Rightarrow\; f(n) = 2\pi$
$n = 4k+3 \;\Rightarrow\; f(n) = -i$
$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$
계속 반복되므로
$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$
$= i \times 501 + f(2005)$
$= 501i - i = 500i$

11. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 10　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

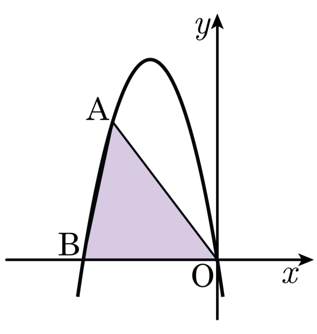
즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

12. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?

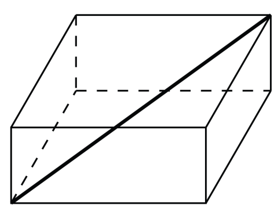


① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0),\ (-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

13. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①
①에 각각 대입하면
$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$
$a^3+b^3+c^3=23$

14. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　　② α　　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\;\;\vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

15. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$

$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^{3} &= \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\\ &=\alpha^3-3\alpha=-1\end{aligned}$$