

1. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore a+b+c = 4$$

2. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$ 이어야 한다.

$$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k+1 = \pm 4$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

3. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

4. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6$ 을 만족한다. $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나누었을 때 나머지는?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 2

해설

$$f(1) = 1 + a + b + c = 2$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$$

세 식을 연립하면,

$$a = -6, b = 13, c = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$$

$$\therefore f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$$

5. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두고 $x = 1 + 2i$ 를 대입하면 $f(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 + a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11 - 3a + b + c) + (-2 + 4a + 2b)i = 0$ a, b, c 가 실수이므로 이제 $x = 1 - 2i$ 를 대입하면 $f(1 - 2i) = (1 - 2i)^3 + a(1 - 2i)^2 + b(1 - 2i) + c = (-11 - 3a + b + c) - (-2 + 4a + 2b)i = 0$ 따라서 ((가))

(가)에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

- ① 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 이면, $1 - 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ② 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 이면, $1 + 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ③ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 - 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ④ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 + 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x = 1 + 2i$ 를 대입한 결과와 $x = 1 - 2i$ 를 대입한 결과가 같다.

6. $x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$w^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \text{의 한 허근이 } \omega$$

$$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$$

$$= w^2 + w + 1$$

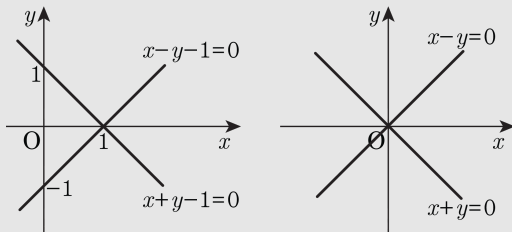
$$= 0$$

7. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

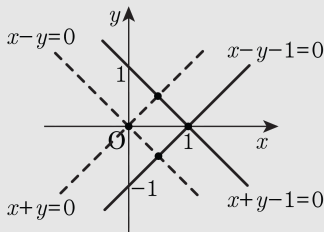
- ① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개
 ④ 2개 ⑤ 4개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$ 라 할 때,

다음 중 a 또는 b 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0, x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = 1$

$\therefore y = \pm 1, x = \mp 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

9. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) = \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) \text{ (단, } k \text{는 정수)} \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수)이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

① i

② $-i$

③ 0

④ $500i$

⑤ $501i$

해설

$$n = 4k \Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i$$

$$n = 4k + 1 \Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i$$

$$n = 4k + 2 \Rightarrow f(n) = 2i$$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow f(n) = -i$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$$

계속 반복되므로

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$$

$$= i \times 501 + f(2005)$$

$$= 501i - i = 500i$$

11. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}x &= \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2} \\&= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}\end{aligned}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{\quad}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

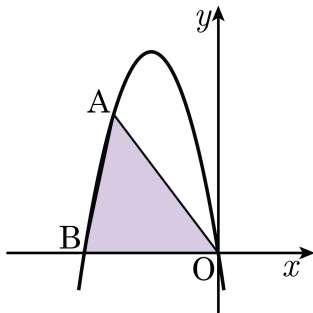
$$\text{즉, } 25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$$

$$\therefore -4a = \pm 20,$$

$$a = \pm 5$$

$\therefore$ 양수 a 는 5

12. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

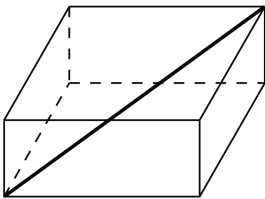
$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

13. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



① 12

② 18

③ 21

④ 23

⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1}$$

①에 각각 대입하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

14. 다항식 $f(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$ 라 한다. $f(x)$ 를 $(x-\alpha)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(\alpha)$ 의 값은?

① 0

② α

③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$

⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,

나머지를 R_1 이라 하면

$$f(x) = (x-\alpha)Q_1(x) + R_1 \text{에서}$$

$Q_n(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 나머지를 R_{n+1} 이라 하면

$$f(x) = (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x) + R_2\} + R_1$$

$$= (x-\alpha)^2Q_2(x) + (x-\alpha)R_2 + R_1$$

$$= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x) + R_3\} + (x-\alpha)R_2 + R_1$$

$$= (x-\alpha)^3Q_3(x) + (x-\alpha)^2R_3 + (x-\alpha)R_2 + R_1$$

$\vdots$

$$= (x-\alpha)^nQ_n(x) + (x-\alpha)^{n-1}R_n +$$

$$\cdots \cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x-\alpha)^n$ 으로 나눈 나머지를

$R(x)$ 라 하면

$$R(x) = (x-\alpha)^{n-1}R_n + \cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1$$

$$\therefore R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$$

15. 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 α , $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ 의 한 근을 β 라 할 때, $\beta^3 + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \text{에서 } \alpha^3 - 3\alpha = -1$$

$\beta^2 - \alpha\beta + 1 = 0$ 에서 양변을 β 로 나누면

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \alpha (\because \beta \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta^3 + \frac{1}{\beta} &= \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\beta \cdot \frac{1}{\beta} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha = -1 \end{aligned}$$