

1. 다항식 $2x^3 + x^2 - 5x + 3$ 을 $x^2 + x - 1$ 로 나눌 때, 몫과 나머지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직접 나누어 보면

∴ 몫 : $2x - 1$, 나머지 : $-2x + 2$

몫과 나머지의 합은 1

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

- ① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$$\begin{aligned} A &= B(2x + 1) - 6x + 2 \text{ 에서} \\ B(2x + 1) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \therefore B &= (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

3. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 9

④ 14

⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore B = x^2 - 3x + 2$

4. $(-2x^3 + x^2 + ax + b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a - 2b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b + 2a)x^3$$

$$2a - 4b = -8$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

5. $a = 2004, b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

6. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형
③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

$$a, b, c \text{ 는 실수이므로, } a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

7. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

㉠ 11 ㉡ 12 ㉢ 13 ㉣ 14 ㉤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

8. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

9. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

10. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$ 를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x - 3$ ④ $x + 1$ ⑤ $x + 2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\&= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

11. 다항식 $(x-1)^3 + 27$ 을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$ 을 A 로 치환하면

$$\text{준식} = A^3 + 27 = (A+3)(A^2-3A+9)$$

다시 $x-1$ 을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

12. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned}x^2+x &= A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\&= (A-2)(A-12)+24 \\&= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\&= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\\therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8)=10\end{aligned}$$

13. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$ 를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a + b - c - d)(a - b + c + d)$

② $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

③ $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$

④ $(a - b + c - d)(a - b + c + d)$

⑤ $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\ &= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + b + c - d)(a - b + c + d) \end{aligned}$$

14. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ &\therefore a = -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

15. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x \text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= \{x + (y + 2)\}\{2x - (y - 6)\} \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ &\therefore a = 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ &\therefore a + b + c + d = 8 \end{aligned}$$

16. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

17. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ 을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① $\angle B = 120^\circ$ 인 둔각삼각형 ② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$ 인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$ 인 예각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b-c) + a(c+b)(c-b) + bc(b-c) \\ &= (b-c) \{a^2 + (c+b)a + bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ &\therefore b = c \quad (\because a+b \neq 0, a+c \neq 0) \end{aligned}$$

18. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $b = c$ 인 이등변삼각형 ④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 &= 0 \\ a^2(a + b) + b^2(a + b) - c^2(a + b) &= 0 \\ (a + b)(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ a = -b \text{ 또는 } c^2 &= a^2 + b^2 \\ a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 &= a^2 + b^2 \\ \therefore \angle C &= 90^\circ \text{인 직각삼각형} \end{aligned}$$

19. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

20. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b = -\sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{2}$ 일 때, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= \{(a - b) + (b - c) + (c - a)\} \\ & \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ & \quad - (a - b)(b - c) - (b - c)(c - a) - (c - a)(a - b)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$