1. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2}$, -2　② $-\frac{7}{12}$, $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2}$, 2
④ $-\frac{2}{7}$, 2　⑤ $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

2. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$ ② $k > 3$ ③ $k \leq 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

4. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답：

▷ 정답： 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

5. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

6. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

7. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

8. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x<-1$일 때,
$-x-1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1\le x<2$일 때,
$x+1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=0$
iii) $x\ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$

9. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x*(x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

10. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

11. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x - 2)(x + 1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

12. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a,b,c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

13. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

14. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$라 하면
$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2$,
$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2 - 2x - 5 = 0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, $\frac{c'}{a} = -\frac{1}{3}$으로
$3x^2 - 2x - 1 = 0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a = 3$, $c = -5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

15. $a^2-3a+1=0$ 일 때, $a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$ 에서

$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$ 의 양변을 a 로 나누면

$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\frac{1}{a}\right)-1=2$

16. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

17. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1　　② -3 또는 2　　③ -2 또는 3

④ -1 또는 4　　⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$

$\therefore\ q = 2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$

$\therefore\ p = -1,\ 4$

18. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a,b,c는 실수)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1+2i-1}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\dfrac{1}{2}i$이면

a,b,c가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α,β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

19. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c$, $a=-b$, $c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1$, $\alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

20. 사차방정식 $x^4+(2k+1)x^2+k^2-5=0$이 서로 다른 두 개의 실근과 서로 다른 두 개의 허근을 갖도록 실수 k의 값을 정할 때, k의 최대 정수값 M과 k의 최소 정수값 m의 곱 $M \cdot m$을 구하면?

① -4　② 2　③ -2　④ -6　⑤ 1

해설

$x^2=t$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$t^2+(2k+1)t+k^2-5=0 \cdots$①
사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면
방정식 ①이 서로 다른 부호의 실근을 가져야 하므로
두 근의 곱 : $k^2-5<0$
$\therefore \; -\sqrt{5}<k<\sqrt{5} \; (\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236\cdots)$
$\therefore \; M=2, \; m=-2$
$\therefore \; M \cdot m=-4$