1. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　　② 20　　③ 10　　④ 7　　⑤ 4

해설

$x^4 + 5x^3 - 20x - 16$
$= (x+1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$
$= (x+1)(x+4)(x^2 - 4)$
$= (x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1 + 4 + 16 + 4 = 25$

2. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

3. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

4. x에 관한 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2,\ \alpha\beta\gamma = -4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$

$= 1 - 3 + 2 + 4 = 4$

5. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이
$\alpha,\ \beta,\ r$이므로
$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면
$4\sqrt{2}-6+6$
$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$
$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

6. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$

7. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$ ② $x^7 + y^7 = 1$ ③ $x^9 + y^9 = 1$
④ $x^{11} + y^{11} = 1$ ⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다
$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$
$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$
① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$
② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$
③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$
④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$
⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

8. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3=1$	㉡ $\omega^2+\omega+1=0$
㉢ $\overline{\omega}=\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$	㉣ $\omega+\overline{\omega}=1$
㉤ $\omega\overline{\omega}=1$	㉥ $\omega^{2005}+\dfrac{1}{\omega^{2005}}=-1$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$x^3=1 \Rightarrow \omega^3=1\cdots$㉠(○)

$x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^2+\omega+1=0\cdots$ ㉡(○)

$\therefore$근과 계수와의 관계에 의해

$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1\cdots$㉣(×), ㉤(○)

$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로

$\omega^2+\omega+1=\omega^2-1-\overline{\omega}+1=0$

$\Rightarrow \omega^2=\overline{\omega}\cdots$㉢(○)

$\omega^{2005}+\dfrac{1}{\omega^{2005}}$

$=(\omega^3)^{668}\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$

$=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$(\because \omega^2+\omega+1=0)\cdots$㉥(○)

9. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 α는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 β는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수$)$로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ± 2