**1.** 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　　② 20　　③ 10　　④ 7　　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

**2.** 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① $-10$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $2$ ⑤ $10$

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서

$x^2+x=A$ 라 하면

$A^2+2A-8=0,$

$(A+4)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$

( i ) $x^2+x=-4$ 일 때,

$x^2+x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$$

( ii ) $x^2+x=2$ 일 때,

$x^2+x-2=0,$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

( i ), ( ii ) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은

$-2+1=-1$

**3.** 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $0$

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

( i ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

( ii ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

( i ), ( ii )에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

**4.** $x$에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 $\alpha, \beta, \gamma$라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+2+4=4$

**5.** 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$의 세 근을 $\alpha$, $\beta$, $r$라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$의 세 근이
$\alpha$, $\beta$, $r$이므로
$2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면
$4\sqrt{2} - 6 + 6$
$= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
$\therefore$ $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

**6.** 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 $x$ cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2$(cm)

**7.** $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$　② $x^7 + y^7 = 1$　③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$　⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

**8.** $x^3 = 1$의 한 허근을 $\omega$라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

ㄱ $\omega^3 = 1$

ㄴ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄷ $\overline{\omega} = \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$

ㄹ $\omega + \overline{\omega} = 1$

ㅁ $\omega\overline{\omega} = 1$

ㅂ $\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots$ ㄱ(○)

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ㄴ(○)

$\therefore$근과 계수와의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots$ ㄹ(×), ㅁ(○)

$\omega + \overline{\omega} = -1$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots$ ㄷ(○)

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668}\omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots$ ㅂ(○)

**9.** 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 $\alpha$는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 $\beta$는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$($a,b,c,d$는 정수)로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 $\pm2$