

1. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a , 나머지를 b 라 할 때, $a + b$ 를 구하면?

- ① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$

$$\therefore a + b = 3x^2 + x + 1$$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$ 로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$ 이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

2. x 에 대한 항등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

계수비교법에 의하여

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$$

$$= cx^2 + (b-c)x + a-b$$

$$x^2 - 2x + 3 = cx^2 + (b-c)x + a-b \text{에서}$$

$$c = 1, b - c = -2, a - b = 3$$

연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = -1, c = 1$$

3. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \dots\dots ①$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \dots\dots ②$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \dots\dots ③$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

$$\text{두 식을 연립하면 } b = 0, c = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

4. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

5. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

① 9

② 4

③ -9

④ -3

⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3, q = -12, \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

6. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a + b)$ 로 정의한다. $Z = \frac{5}{2-i}$ 일 때, $Z \oplus \bar{Z}$ 의 값은?

① 1

② $1 + 2i$

③ $1 - 2i$

④ -1

⑤ $2 - 2i$

해설

$Z \oplus \bar{Z} = Z\bar{Z} - (Z + \bar{Z})$, $Z = 2 + i$, $\bar{Z} = 2 - i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5 - 4 = 1$ 답은 ①

7. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

8. $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 0

④ 1

⑤ 4

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 에 대입하면

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\frac{1}{4} = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\text{따라서 } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

9. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a

② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$

④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3) \\&= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\} \\&= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)\end{aligned}$$

10. $1 - 4x^2 - y^2 + 4xy = (1 + ax + by)(1 + cx + dy)$ 일 때, $ac + bd$ 의 값을 구하면?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

$$(\text{준식}) = 1 - (4x^2 - 4xy + y^2)$$

$$= 1^2 - (2x - y)^2$$

$$= (1 + 2x - y)(1 - 2x + y)$$

$$\therefore a = 2, b = -1, c = -2, d = 1$$

$$\therefore ac + bd = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 = -5$$

11. $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$ 로 인수분해 될 때,
 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = (x+1)(x-1)(x^4 + 5x^2 + 6)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

12. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A = x^2 + ax + 2$, $B = x^2 + bx + c$ 이고 A, B 의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$A = m(x+1)$, $B = n(x+1)$ 이라 놓으면

$$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\therefore mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\therefore m = x+2, n = x-1 \text{ 또는 } m = x-1, n = x+2$$

$$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$

$$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\text{여기서, } a = 3, b = 0, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

13. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50} + i^{50} - (-i)^{100} \\&= \{(-i)^2\}^{25} + (i^2)^{25} - \{(-i)^2\}^{50} \\&= -1 - 1 - 1 = -3\end{aligned}$$

14. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $z + \bar{z}$ 는 실수이다. ② $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.
③ $z\bar{z} = 1$ 이면 $z^2 = 1$ 이다. ④ $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.
⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 하면

- ① $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (참)
② $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi$
 $\Leftrightarrow 2bi = 0$
 $\Leftrightarrow b = 0$ (참)
③ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a = 0$, $b = 1$ 일 때, $z^2 = -1$
④ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b = 0$ (참)
⑤ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (참)

15. $a - b < 0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2} - |a+b|$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ $a - 2b$

④ $2a + b$

⑤ 0

해설

$a - b < 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a < 0$, $b < 0$

따라서 $a - b < 0$, $a + b < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2} - |a+b| &= |a-b| - |a+b| \\ &= -(a-b) + (a+b) \\ &= -a + b + a + b = 2b\end{aligned}$$

16. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 + i$ 를 대입하여 정리하면

$$1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0 \text{ 과}$$

$$a + b + (a + 2)i = 0 \text{ 이다.}$$

위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서

$$a = -2, b = 2 \text{ 이다.}$$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.

따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$

근과 계수의 관계에서

$$-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$$

18. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m-1 = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$

② $m \geq 5$

③ $m < 5$

④ $m \leq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$$

$$\text{즉 } m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$ 이므로

$$m \leq 1 \text{ 또는 } m \geq 5$$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$ 이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m-1 > 0$ 이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

19. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

① 2046

② 2047

③ 2048

④ 2049

⑤ 2050

해설

$$a = (3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

양변에 $(3-1)$ 을 곱하면

$$(3-1)a = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

$$\begin{aligned} 2a &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^8-1)\cdots(3^{1024}+1) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= (3^{2048}-1)$$

양변을 2로 나누면

$$a = \frac{1}{2}(3^{2048}-1)$$

$$\therefore k=2, l=2048, m=-1$$

$$\therefore k+l+m=2049$$

20. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

21. $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B(b, 1)라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

① 1

② 2

③ -2

④ -3

⑤ -1

해설

(i) 준식을 k 에 관하여 정리하면

$$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1, y = 0$$

$$\therefore A(1, 0)$$

(ii) A(1, 0), B(b, 1)에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore b = 0, 2$$

$\therefore b$ 의 값들의 합은 2

22. $a + b + c = 0$ 일 때, $\frac{a^2 + 1}{bc} + \frac{b^2 + 1}{ac} + \frac{c^2 + 1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) + c(c^2 + 1)}{abc} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc}\end{aligned}$$

그런데, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이므로

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

23. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a \text{에}$$

$$x=3 \text{ 대입, } 81 + 9a - 81 - 3a - 6a = 0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -24 + 4a - 36 + 2a - 6a \neq 0 \text{ 이므로}$$

$x-1$ 을 인수로 가져야 한다.

$$x=1 \text{ 대입 } 3 + a - 9 - a - 6a = 0, a = -1$$

24. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉤ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉤ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>

25. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때,
다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

26. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초

② 2 초

③ 3 초

④ 4 초

⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned}h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\&= -5(t - 3)^2 + 67\end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

27. 세 변의 길이가 x, y, z 인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① $z = x$ 인 이등변삼각형, 또는 y 가 빗변인 직각삼각형

② $y = z$ 인 이등변삼각형, 또는 x 가 빗변인 직각삼각형

③ x 가 빗변인 직각삼각형

④ y 가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x = y$ 인 이등변 삼각형, 또는 z 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & (x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)(x + y)^2(x^2 + y^2) - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)\{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2)z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xyz^2 - 2y^2z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)\{(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) = 0 \\
 &\therefore x = y \text{인 이등변 삼각형 또는 } z \text{가 빗변인 직각 삼각형} \\
 &(\because x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 \text{에서 삼각형의 변인 } x, y, z \text{는 } x + y \neq z)
 \end{aligned}$$

28. a, b, c, d 가 실수이고 $a^2 - b^2 = 3$, $c^2 + d^2 = 4$, $ab = 1$, $cd = 2$ 일 때, $a^2d^2 - b^2c^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$a^2 - b^2 = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$c^2 + d^2 = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$ab = 1 \cdots \textcircled{㉢}$$

$$cd = 2 \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉣} \text{에서 } (c - d)^2 = 0 \quad (\because 2cd = 4)$$

$$\therefore c = d, \quad c^2 = d^2 = 2 \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉤} \text{에서 } a^2d^2 - b^2c^2 = 2(a^2 - b^2) = 2 \times 3 = 6$$

29. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

① $(p + q)^2$

② $(2p + q)^2$

③ $(p - 2q)^2$

④ $(p - q)^2$

⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = p, \gamma + \delta = -n, \gamma\delta = q \text{ 이므로}$$

$$\text{주어진 식} = \{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$$

$$= \{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$$

$$= (\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$$

$$\text{그런데, } \gamma^2 + n\gamma + q = 0 \text{ 에서}$$

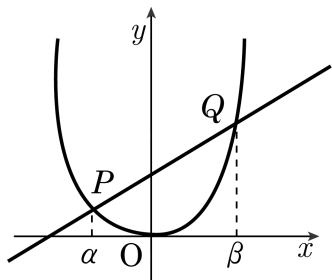
$$\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$$

$$\text{또, } \delta^2 + n\delta + q = 0 \text{ 에서}$$

$$\delta^2 + n\delta + p = p - q$$

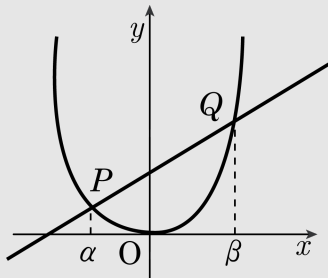
$$\text{따라서, 주어진 식} = (p - q)^2$$

30. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = -3m$

$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1$, $-3m = -1$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

31. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. $y = a(x - 2)^2 - 2$. 또한 최솟값이 존재하므로, $a > 0$ 이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로, y 절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서 y 절편 $= 4a - 2 \geq 0$, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로 a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수는 1이다.

32. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$

② -2

③ $-\frac{9}{8}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

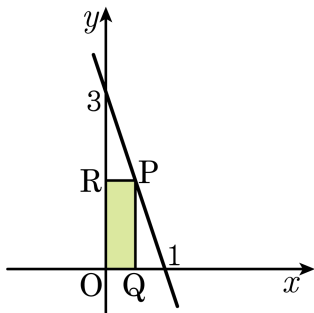
해설

$$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x - m)^2 + m - 1 + 2m^2$$

$$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.

33. 직선 $y = -3x + 3$ 위의 제 1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = x(-3x + 3) (0 < x < 1)$$

$$= -3x^2 + 3x$$

$$= -3 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$= -3 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 일 때 최댓값 } \frac{3}{4}$$