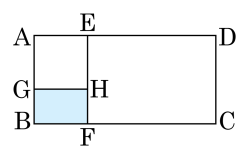


1. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$ 일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



- ① $a^2 - 2ab - b^2$ ② $a^2 + 3b^2 - 2ab$
③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$ ④ $-a^2 + 3ab - b^2$
⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$$\begin{aligned}\square\text{GBFH} &= \square\text{ABCD} - \square\text{AGHE} - \square\text{EFCD} \\ &= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2 \\ &= -a^2 + 3ab - 2b^2\end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$ 으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$$

$$\therefore 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13$, $b = 8$

3. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\frac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$ 라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y 에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0, a+k=0, -b+k=0$

$\therefore k=2, a=-2, b=2$

$\therefore a-b=-4$

4. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

- ① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$
④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$ 일 때, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = 1 \text{에서 } a + b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 2 \text{에서 } 2a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = 1, b = 0$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x$$

$$f(x) \text{를 } x-3 \text{으로 나눈 나머지는 } f(3) \text{이므로 } f(3) = 2Q(3) + 3$$

6. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

9. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$ 의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	<u>37</u>

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	<u>$9a+b+24$</u>

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$

이므로

$$k=3, c=3, a=1, d=12, b=4$$

$$\text{따라서 } a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$$

10. x 에 관한 항등식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 를 만족시키는 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
 $= (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d$
 $= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$
따라서 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a = 1, b = 5, c = 4, d = 5$
 $\therefore abcd = 100$

11. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

- ① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 치환 하면} \\ (\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6-1 \\ &= 100^6-1 \end{aligned}$$

12. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m²인가?

① 12 m² ② 13 m² ③ 14 m² ④ 15 m² ⑤ 16 m²

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{(겉넓이)} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 25 - 9 = 16(\text{m}^2) \end{aligned}$$

13. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
 $= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
 $\therefore (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
 $\qquad \qquad \qquad = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$
 $\therefore a = 1, 2a+b = -2, a+b+c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

14. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

15. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{ 에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots\dots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를 x 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$① \text{ 에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

16. n 이 자연수일 때, x 의 정식 $x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$ 이 될 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-3)^2 Q(x) + 3^n(x-3) \cdots \textcircled{1}$$

$$x=3\text{을 대입하면 } 3^n(9+3a+b)=0$$

$$\therefore b = -3a-9 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^n(x^2 + ax - 3a - 9) = (x-3)^2 Q(x) + 3^n(x-3)$$

$$\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\} = (x-3)\{(x-3)Q(x) + 3^n\}$$

양변을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면

$$x^n(x+a+3) = (x-3)Q(x) + 3^n$$

$$x=3\text{을 대입하면 } 3^n(6+a) = 3^n \quad \therefore 6+a=1 \quad \therefore a=-5$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } b=6$$

$$\therefore a=-5, b=6 \quad \therefore a+b=1$$

17. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

18. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1) 로 나누면 나머지가 $2x+4$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 x^3-1 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① x^2+x+3 ② x^2+2x+3 ③ $-x^2+x+3$
④ $-x^2+2x+3$ ⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x) = (x^3-1)Q(x) + ax^2+bx+c$ 라 하면
 $f(x)$ 를 (x^2+x+1) 로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c 에서 발생한다.
 $\therefore ax^2+bx+c = a(x^2+x+1) + 2x+4 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore f(x) = (x^3-1)Q(x) + a(x^2+x+1) + (2x+4)$
그런데 $f(1) = 3$ 이므로 $3a+6=3$
 $\therefore \textcircled{1}$ 에서 $b=1, c=3$
따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$