1. $P = a^3 + 4a^2b + 2ab^2$, $Q = -2a^2b + 3ab^2 - b^3$ 일 때, $3P - 2Q$를 계산하면?

① $3a^3 + 12a^2b + 2b^3$

② $3a^3 - 12a^2b + 2b^3$

③ $3a^3 + 16a^2b + 2b^3$

④ $3a^3 + 8a^2b + 2b^3$

⑤ $3a^3 - 8a^2b + 2b^3$

해설

$3(a^3 + 4a^2b + 2ab^2) - 2(-2a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= 3a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3$
$= 3a^3 + 16a^2b + 2b^3$

2. 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, $a-b+c$의 값을 구하여라.

$$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=ax^2-(2a-b)x+(a-b+c)$
상수항을 비교해 보면
$\therefore\ a-b+c=1$

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a-b+c$

3. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$ 이 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+2b+3c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$-2=2a \quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-3=-b \quad \therefore\ b=3$
양변에 $x=2$를 대입하면
$0=2c \quad \therefore\ c=0$
$\therefore\ a+2b+3c=5$

4. 다항식 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx - k$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 k의 값을 정하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

즉, $f(-1) = 0$ 이므로

$f(-1) = -1 + 3 - k - k = 0$, $\therefore k = 1$

5. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75　② 125　③ 900　④ 1000　⑤ 1225

해설

$$125^2 - 75^2 = (125 + 75)(125 - 75)$$
$$= 200 \times 50 = 10000$$
$$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + -\frac{20}{-4} = 10$$
(준 식)$= 10000 \div 10 = 1000$

6. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 4　⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 에서 $4x+4yi = 8-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4x = 8$, $4y = -2$
$\therefore\ x = 2,\ y = -\frac{1}{2}$
$\therefore\ xy = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

7. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$

④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$
$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$
$=-1+i$

8. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a < -1$

해설

(두 근의 곱) $= a + 1 < 0$ $\quad \therefore a < -1$

9. $(6x^3-x^2-5x+5)\div(2x-1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a+b$를 구하면?

① $3x^2+x+1$　② x^2+x+1　③ $3x^2+1$
④ x^2+x-1　⑤ $3x^2+x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a=3x^2+x-2,\ b=3$
$\therefore\ a+b=3x^2+x+1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.
이 때, $2x-1$로 나눈 몫은 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &= (2x-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Q(x)+R \end{aligned}$$

10. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ −1　⑤ −2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

11. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로
$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$
따라서 $a = 0$또는 $a = -4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

12. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=27-9=18$

13. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.
$\therefore\ x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

14. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3　　② -2　　③ 0　　④ 6　　⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

15. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x=1$

16. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

17. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

18. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$
$f(x)=(x+1)Q1(x)+5$으로 놓으면 $f(-1)=5$
$f(x)=(x-2)Q'(x)$으로 놓으면 $f(2)=0$
따라서, $f(-1)=-1+m-n+1=5$
$f(2)=8+4m+2n+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{1}{6},\quad n=-\frac{29}{6}$
$\therefore\ m+n=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}$

19. x 에 대한 항등식 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 a,b,c,d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & -1 & 2 & & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & -1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd=1\times(-3)\times3\times(-2)=18$

20. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$로 인수분해될 때, $|ab - cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

(준식) $= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$

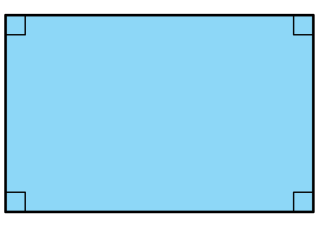
$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$

여기서 계수를 비교하면

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2,\ d = 3$

$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$

21. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ 25 ④ 50 ⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10-x$, 넓이를 y 라 하면

$y = x(10-x)$

$= -(x^2 - 10x)$

$= -(x^2 - 10x + 25 - 25)$

$= -(x-5)^2 + 25$

$\therefore$ (최대 넓이) $= 25$

22. a, b는 실수라 한다. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+a^2x+b^2-2a=0$, $x^2-2ax+a^2+b^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0 \quad \cdots$ ②

① − ② 하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$

$\therefore \ (a^2+2a)(\alpha-1)=0$

$\therefore \ a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $a^2+2a=0$일 때는 $a^2=-2a$이므로

두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

$\therefore \ \alpha=1$

①에 대입하면 $1+a^2+b^2-2a=0$

$\therefore \ (a-1)^2+b^2=0$

a, b는 실수이므로 $a-1=0$, $b=0$

$\therefore \ a+b=1$

23. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

24. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

(주어진 식)$= 0$ 이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(= D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

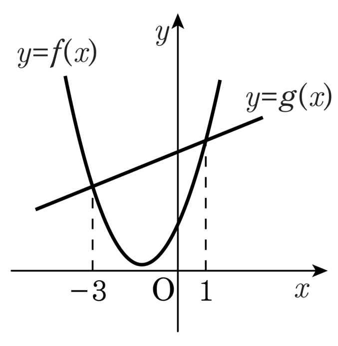
$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

25. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8