

1. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

2. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

$\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$

$\textcirc� \quad ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$

$\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$

- ① $\textcirc�$

② $\textcirc�, \textcirc�$

③ $\textcirc�, \textcirc�$
- ④ $\textcirc�, \textcirc�$

⑤ $\textcirc�, \textcirc�, \textcirc�$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = b^2 - 4ac > 0 \dots$
 $\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은
 $D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$
 $= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 $\textcirc�$ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때
 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만
 $x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.
 $\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은
 $D = b^2 - 4ac > 0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k-a)x + k^2 + a^2 - b + 1 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b 의 값은?

① $a = 1, b = 1$

② $a = 1, b = 0$

③ $a = 0, b = 1$

④ $a = -1, b = 0$

⑤ $a = -1, b = -1$

해설

$\frac{D}{4} = 0$ 이므로,

$$(k-a)^2 - (k^2 + a^2 - b + 1) = 0$$

$$-2ak + (b-1) = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

5. x 에 대한 다항식 $(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) - 4$ 를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① $x^2 - 2$

② $x^2 + 2$

③ $x^2 - 4x + 2\sqrt{2} - 4$

④ $x^2 + 4x + 2\sqrt{2}$

⑤ $4x - 4$

해설

$x^2 - 2x = t$ 로 치환할 때,

$$t^2 + 3t - 4$$

$$= (t + 4)(t - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

$$(\because x^2 - 2x + 4 \text{의 } \frac{D}{4})$$

인수의 합은

$$(x^2 - 2x + 4) + (x - 1 - \sqrt{2}) + (x - 1 + \sqrt{2}) = x^2 + 2$$

6. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + (k+3) = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$$

$$k^2 - 7k + 6 \geq 0, (k-1)(k-6) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 1, k \geq 6$$

(ii) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$$2(k-3) < 0, k+3 > 0$$

$$\therefore -3 < k < 3$$

(i), (ii)에 따라 $-3 < k \leq 1$

$\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 1

7. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$ 의 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-(x+1) - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ ($x < -1$ 에 부적합)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1 - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1 + x-2 = x+3$
 $\therefore x = 4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0, 4$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

8. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

- ① $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 의 양변을 y^2 으로 나누면

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{x}{y} = t \text{ 라 하면 } (t > 0)$$

$$2t^2 + t - 2 = 0$$

근의 공식에 대입하면

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad (t > 0) \quad \frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

9. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자
 $\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$
 $(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $m = \alpha$ 그리고 $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$
 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = 4$
 m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

10. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

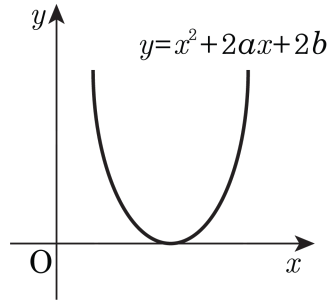
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
③ 중근을 갖는다.
④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면 ? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\{ (a + b) + 1 \}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1 \end{aligned}$$

13. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

14. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

15. x 보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x 보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $\langle x \rangle$ 로 나타낼 때, 방정식 $[x] + \langle x \rangle = 7$ 의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$

② $3 \leq x \leq 4$

③ $3 \leq x < 4$

④ $3 < x \leq 4$

⑤ $3 < x < 4$

해설

x 가 정수 k 일 때,
 $[x] = \langle x \rangle = k$
 $k < x < k + 1$ 일 때,
 $[x] = k, \langle x \rangle = k + 1$
따라서 $[x] + \langle x \rangle = 7$ 이고
 $[x], \langle x \rangle$ 는 정수이므로
 $[x] = 3, \langle x \rangle = 4$ ($\because [x] \leq \langle x \rangle$)
 $\therefore 3 < x < 4$

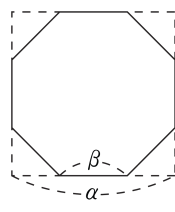
16. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

- ① $(p + q)^2$
- ② $(2p + q)^2$
- ③ $(p - 2q)^2$
- ④ $(p - q)^2$
- ⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = p, \gamma + \delta = -n, \gamma\delta = q$ 이므로
주어진 식 = $\{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$
= $\{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$
= $(\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$
그런데, $\gamma^2 + n\gamma + q = 0$ 에서
 $\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$
또, $\delta^2 + n\delta + q = 0$ 에서
 $\delta^2 + n\delta + p = p - q$
따라서, 주어진 식 = $(p - q)^2$

17. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

18. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, f(1) = 1$ 을 만족시키는 이차식 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$ 는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
 $\therefore f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 에서
즉, α, β 는 $f(x) = 1 - x$ 의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$ 은
 $(x - \alpha)(x - \beta)$ 를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$ 가 이차식이므로
 $f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
 $f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1,$
 $f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
 $\therefore a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

19. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 α 는 허수이고, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 은 실수이다. 이 때, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ 의 값은?

- ① 0
- ② -1
- ③ 1
- ④ i
- ⑤ $-i$

해설

α 가 근이므로 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
 $\beta = \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \alpha \cdots \cdots$ ①
 $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 이 실수이므로, $\frac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}$
 $\therefore \bar{\alpha}\beta^2 = \alpha\bar{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$
 $\therefore \beta^3 = \alpha^3$
 $\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$

20. x 의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$ 의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k 의 최솟값을 구하면?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β 라 하면
(i) 두 근이 모두 양수일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$
 $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$
이들의 공통 범위를 구하면
 $-3 \leq k < -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,
 $\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$
 $\therefore k = -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$
구하는 k 의 범위는 $\textcircled{\text{㉠}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉡}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉢}}$ 이므로
 $-3 \leq k \leq 1$
 $\therefore$ 최솟값 -3