1. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

2. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$　② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$　④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\dfrac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

5. x에 대한 다항식 $(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)-4$를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① x^2-2
② x^2+2
③ $x^2-4x+2\sqrt{2}-4$
④ $x^2+4x+2\sqrt{2}$
⑤ $4x-4$

해설

$x^2-2x=t$ 로 치환할 때,

t^2+3t-4

$=(t+4)(t-1)$

$=(x^2-2x+4)(x^2-2x-1)$

$=(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

$(\because\ x^2-2x+4$ 의 $\dfrac{D}{4})$

인수의 합은

$(x^2-2x+4)+(x-1-\sqrt{2})+(x-1+\sqrt{2})=x^2+2$

6. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+(k+3)=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(ⅰ) 두 근이 실수이므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$

$\dfrac{D}{4}=(k-3)^2-1\cdot(k+3)\geq 0$

$k^2-7k+6\geq 0,\ (k-1)(k-6)\geq 0$

$\therefore k\leq 1,\ \ k\geq 6$

(ⅱ) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$2(k-3)<0,\ k+3>0$

$\therefore -3<k<3$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-3<k\leq 1$

$\therefore$ 정수 k의 최댓값은 1

7. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,

$-(x+1)-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=-\dfrac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)

ⅱ) $-1 \le x < 2$일 때,

$x+1-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=0$

ⅲ) $x \ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $x=0,\ 4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

8. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})-2=0$

$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$

$2t^2+t-2=0$

근의 공식에 대입하면

$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t>0)$ $\frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

9. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

10. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

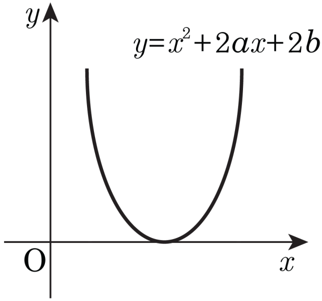
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, $a,\ b$는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\ge 0$$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\ge 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\le 0$

$\{(a+b)+1\}^2\le 0$

그런데 $a,\ b$가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab&=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\&=(-1)^3-3ab(-1)-3ab\\&=-1\end{aligned}$$

13. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면

$x^2+5yx+ay^2+y-2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D=(25-4a)y^2-4y+8$

$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$

$4-200+32a=0$

$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

14. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면

$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.

$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$

$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠

또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.

$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡

$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로

처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$

$\therefore\ x=-5$ 또는 -7, $\quad x=5$ 또는 7

따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

15. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x] + < x > = 7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \leq x \leq 4$ ③ $3 \leq x < 4$

④ $3 < x \leq 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,

$[x] = < x > = k$

$k < x < k+1$일 때,

$[x] = k, < x > = k+1$

따라서 $[x] + < x > = 7$이고

$[x], < x >$는 정수이므로

$[x] = 3, \quad < x > = 4$ ($\because$ $[x] \leq < x >$)

$\therefore$ $3 < x < 4$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$

④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로

주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$

$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$

$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$

그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서

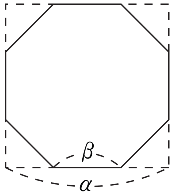
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$

또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서

$\delta^2+n\delta+p=p-q$

따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

17. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}$, $p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}$, $p = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1$, $p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1$, $p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1$, $p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha$이므로

$\beta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2 + px + (\sqrt{2}+1) = 0$의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha > 0$이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha + (\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2}-2$

18. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
$\therefore\ f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$에서
즉, α, β는 $f(x) = 1 - x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$은
$(x - \alpha)(x - \beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
$f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
$f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
$\therefore\ a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

19. 실계수 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 α는 허수이고, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$은 실수이다. 이 때, $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3$의 값은?

① 0　　② -1　　③ 1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

α가 근이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
$\beta=\overline{\alpha},\ \overline{\beta}=\alpha\cdots\cdots$①

$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)}$

$\therefore\ \overline{\alpha}\beta^2=\alpha\overline{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2=\alpha\alpha^2$
$\therefore\ \beta^3=\alpha^3$

$\therefore\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3=\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}=1$

20. x의 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2(k^2-1)=0$의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k의 최솟값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0$, $\alpha\beta=2(k^2-1)>0$,

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-1)\geq 0$

이들의 공통 범위를 구하면

$-3\leq k<-1\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$\alpha\beta=2(k^2-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0$, $\alpha\beta=2(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=-1\cdots\cdots$ ㉢

구하는 k의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로

$-3\leq k\leq 1$

$\therefore$ 최솟값 -3