

1. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1

② 2

③ 4

④ 8

⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 실수)라 하면

$$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $-2 = c$

$$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x = i$ 을 대입하면

$$-i - 2 = -a + bi - 2$$

$$a = 0, b = -1 \text{ 이므로 } R(x) = -x - 2$$

$$\therefore x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-1 = 2Q(1) - 3 \text{ 이므로}$$

$$\therefore Q(1) = 1$$

2. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x - 7$ 이고, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $4x + 3$

③ $x - 1$

④ $4x - 9$

⑤ $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 5)Q(x) + ax + b \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x - 5)(x + 2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1) = -5$, $f(5) = 11$ 이다.

⑦에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$f(5) = 5a + b = 11$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는 $4x - 9$ 이다.

3. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 있다.

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999, Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$$

두 삼차다항식을 $x^2 - 1$ 로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$ 의 값은?

① -3998

② -1999

③ 0

④ 1999

⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$ 로 놓으면

$H(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$H(x) = 2x^3 + (a - c)x^2 + (b - d)x + 3998$$

$= (x^2 - 1)(2x - 3998)$ 으로 놓을 수 있다.

($\because x^3$ 의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫은 $2x - 3998$ 이다.)

$$\therefore P(1999) - Q(1999)$$

$$= H(1999)$$

$$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$$

$$= 0$$

4. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x^2 - 1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \}$$

$$= (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x+1)(x-1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \}$$

$$= (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x-1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

5. x 에 대한 항등식 $x^{1997} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

- ① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$$x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \text{라 하면}$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 3 = a + b$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } -1 = -a + b$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$\therefore x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 1$$

$$x^{1997} - x = (x^2 - 1)Q(x)$$

$$x(x-1)(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1)$$

$$= (x-1)(x+1)Q(x)$$

$$\therefore x(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1) = (x+1)Q(x)$$

$Q(1)$ 이 $Q(x)$ 의 모든 계수의 합이므로 $x = 1$ 을 대입하면

$$2Q(1) = 1996 \quad \therefore Q(1) = \frac{1996}{2} = 998$$

6. 임의의 자연수 k 에 대하여 $x - k$ 로 나눈 나머지가 k 인 다항식 $f(x)$ 의 개수를 구하면?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k 에 대하여 $\therefore f(k) = k$
따라서 $g(x) = f(x) - x$ 로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x) = 0$
이 성립

$$\therefore g(x) = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = x$$

$\therefore$ 1개