1. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-2)(x+2)Q(x)+ax+b$$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2},\ b=4$

3. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$

$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

4. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p + q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
$\therefore\ p = -4$
$q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
$\therefore\ q = 1$
$\therefore\ p + q = -4 + 1 = -3$

6. 이차방정식 $4x^2+12x+k=0$의 두 근 α, β에 대하여 $2\alpha=\beta+6$이 성립할 때, $\frac{k}{4}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=\frac{k}{4}$

$2\alpha=\beta+6$이므로

$2\alpha=(-\alpha-3)+6,\ 3\alpha=3$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=-4$

$\frac{k}{4}=\alpha\beta=1\cdot(-4)=-4$

7. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 $x,\ x+4$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2+(x+4)^2 \\ &= 2x^2+8x+16 \\ &= 2(x+2)^2+8 \end{aligned}$$

$x=-2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x=-2,\ x+4=2$

따라서 구하는 두 수는 $-2,\ 2$

8. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$$(3-1)a=(3-1)(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$$

$$\begin{aligned}2a&=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&\ \ \vdots\\&=\left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

9. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$ 일 때, a^5+b^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times10-9\times4\\ &= 244\end{aligned}$$

10. x에 관한 3차 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2, $x+1$로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 하면 $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$라 하면
$f(1) = 2,\ f(-1) = 4$에서
$p + a + q + b = 2 \cdots$ ㉠
$-p + a - q + b = 4 \cdots$ ㉡
㉠ + ㉡를 하면
$2(a+b) = 6,\ a + b = 3$

11. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

12. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y)$

$= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\}$

$= (x-y)(x+y+1)^2$

$p = -1, q = 1, r = 1$

$\therefore\ p^2 + q^2 + r^2 = 3$

13. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$의 인수인 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}
&ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)\\
&=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2\\
&=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)\\
&=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=-(b+c)(a-b)(a-c)\\
&=(a-b)(b+c)(c-a)
\end{aligned}$$

14. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$a^2=1$

$\therefore\ a=b=c=1$

$\therefore\ a+b+c=3$

15. 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b] = 0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 0$

전개하여 정리하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

$\therefore\ a = b = c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c) = 0$

16. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i, \dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\dfrac{1-i}{1+i})+f(\dfrac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

17. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 의 값은?

① $2+\sqrt{3}i$ ② $2-\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $-3+\sqrt{3}i$ ⑤ $3-\sqrt{3}i$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $2x = 1+\sqrt{3}i$, $2x-1 = \sqrt{3}i$
$4x^2 - 4x + 1 = -3$
$4x^2 - 4x + 4 = 0$
$x^2 - x + 1 = 0$
$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면
$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$
$= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 3) + 2x + 1$
$= 0 + 2x + 1$
$= 2 \times \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + 1$
$= 2+\sqrt{3}i$

18. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기			
㉠ 1	㉡ -1	㉢ i	㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$
$=1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

19. 이차방정식 $ax(x-1)+bx(x-1)+c(x^2+1)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\dfrac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$의 값은?

① $\dfrac{a+b+c}{2}$　② $a+b+c$　③ $ab+bc+ca$

④ $\dfrac{ab+bc+ca}{2}$　⑤ abc

해설

(Ⅰ) 주어진 식을 정리하면

$(a+b+c)x^2-(a+b)x+c=0\quad(a+b+c\neq 0)$

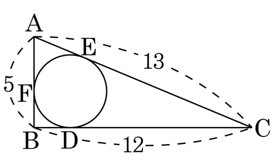
$\alpha+\beta=\dfrac{a+b}{a+b+c}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a+b+c}$

(Ⅱ) (준식) $=\dfrac{c}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$$=\frac{c(a+b+c)}{c-(a+b)+(a+b+c)}$$

$$=\frac{c(a+b+c)}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$$

20. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　② $x^2 + 5x + 6 = 0$
③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$
⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,
$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$
그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로
$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$
$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$
$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$
두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$
$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

21. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 $\alpha,\ \beta$를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi\ (q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

22. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

23. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

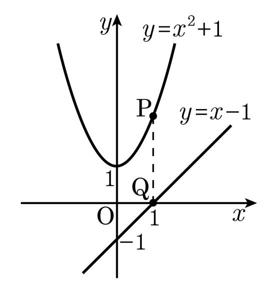
$y=a(x+3)^2+4$
$=a(x^2+6x+9)+4$
$=ax^2+6ax+9a+4$

$9a+4=2,\ 9a=-2$ 이므로 $a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$\therefore abc=\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{27}$

24. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

25. 밑변의 길이와 높이의 합이 $28\,\mathrm{cm}$ 인 삼각형의 최대 넓이는?

① $90\,\mathrm{cm}^2$ ② $92\,\mathrm{cm}^2$ ③ $94\,\mathrm{cm}^2$
④ $96\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $98\,\mathrm{cm}^2$

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$, 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\
&= \frac{1}{2}(-x^2+28x) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-28x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-14)^2+98
\end{aligned}
$$