

1. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, \quad 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x+2$ 로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$ 를 x^2-4 로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$ 이다. $4a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$f(2) = 5, f(-2) = 3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 2)(x + 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$f(2) = 2a + b = 5, f(-2) = -2a + b = 3$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 4$$

3. $|x - y| + (y - 2)i = 5x - 2 - 3xi$ 를 만족하는 실수를 x, y 라 할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$ 일 때,

$$(x - y) + (y - 2)i = 5x - 2 - 3xi$$

$$x - y = 5x - 2, \quad y - 2 = -3x$$

$\therefore x = 0, y = 2$ ($x < y$ 이므로 부적합)

(ii) $x < y$ 일 때,

$$-(x - y) + (y - 2)i = 5x - 2 - 3xi$$

$$-x + y = 5x - 2, \quad y - 2 = -3x$$

$$\therefore x = \frac{4}{9}, \quad y = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

4. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$ 의 해를 $a \leq x < b$ 라 할 때, $2a + b$ 의 값을 구하면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = 1$

$$\therefore 1 \leq x < 2$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \text{ 이므로 } 2a + b = 4$$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$ 도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서

$$-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$\therefore p = -4$$

$$q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = -4 + 1 = -3$$

6. 이차방정식 $4x^2 + 12x + k = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $2\alpha = \beta + 6$ 이 성립할 때, $\frac{k}{4}$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 6

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = \frac{k}{4}$$

$2\alpha = \beta + 6$ 이므로

$$2\alpha = (-\alpha - 3) + 6, 3\alpha = 3$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = -4$$

$$\frac{k}{4} = \alpha\beta = 1 \cdot (-4) = -4$$

7. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 x , $x + 4$ 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x^2 + (x + 4)^2 \\&= 2x^2 + 8x + 16 \\&= 2(x + 2)^2 + 8\end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$$\therefore x = -2, x + 4 = 2$$

따라서 구하는 두 수는 $-2, 2$

8. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l + m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

① 2046

② 2047

③ 2048

④ 2049

⑤ 2050

해설

$$a = (3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

양변에 $(3-1)$ 을 곱하면

$$(3-1)a = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

$$\begin{aligned} 2a &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^8-1)\cdots(3^{1024}+1) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= (3^{2048}-1)$$

양변을 2로 나누면

$$a = \frac{1}{2}(3^{2048}-1)$$

$$\therefore k=2, l=2048, m=-1$$

$$\therefore k+l+m=2049$$

9. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2} \{ (a + b)^2 - (a^2 + b^2) \} = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned} \therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244 \end{aligned}$$

10. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$$2(a+b) = 6, a+b = 3$$

11. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,
 $\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소)이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

12. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

13. 다음 보기 중 $ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$

㉡ $b+c$

㉢ $a-c$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned} & ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c) \\ &= ab^2 - a^2b + ac^2 - a^2c + 2abc - b^2c - bc^2 \\ &= -(b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a - bc(b+c) \\ &= -(b+c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= -(b+c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b+c)(c-a) \end{aligned}$$

14. 세 양수 a, b, c 가 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 를 만족시킬 때 a, b, c 를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이라고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \text{에서}$$

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{이므로 } a + b + c \neq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} = 0$$

$$\therefore a = b = c \quad (\because a, b, c \text{는 실수})$$

따라서 a, b, c 를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그

$$\text{넓이가 } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$a^2 = 1$$

$$\therefore a = b = c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

15. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a - b)(a - c)$ 라 할 때,
 $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = 0$$

전개하여 정리하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a - b)(a - c) = 0$$

16. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= f(-i) + f(i)$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$

$$= i^{98} + (-i)^{98}$$

$$= i^2 + i^2$$

$$= -2$$

17. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 의 값은?

① $2 + \sqrt{3}i$

② $2 - \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $-3 + \sqrt{3}i$

⑤ $3 - \sqrt{3}i$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, 2x = 1 + \sqrt{3}i, 2x - 1 = \sqrt{3}i$$

$$4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$4x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면

$$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$$

$$= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 3) + 2x + 1$$

$$= 0 + 2x + 1$$

$$= 2 \times \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + 1$$

$$= 2 + \sqrt{3}i$$

18. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1

㉡ -1

㉢ i

㉣ $-i$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k + 2$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

ii) -1 이 $4k$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

19. 이차방정식 $ax(x-1) + bx(x-1) + c(x^2+1) = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\frac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 의 값은?

① $\frac{a+b+c}{2}$

② $a+b+c$

③ $ab+bc+ca$

④ $\frac{ab+bc+ca}{2}$

⑤ abc

해설

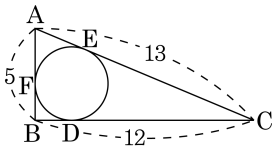
(Ⅰ) 주어진 식을 정리하면

$$(a+b+c)x^2 - (a+b)x + c = 0 \quad (a+b+c \neq 0)$$

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{a+b+c}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\begin{aligned} \text{(Ⅱ) (준식)} &= \frac{c}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{c(a+b+c)}{c - (a+b) + (a+b+c)} \\ &= \frac{c(a+b+c)}{2c} = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

20. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$ 라 할 때, α , β 를 두 근으로 하고 x^2 이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$

② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$

④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha, \quad \overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta,$$

$$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$ 이므로

$$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$$

$$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$$

$$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$$

21. 실계수의 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근 α, β 를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$$\alpha = p + qi \text{ 이면 } \beta = p - qi \ (q \neq 0)$$

$$\alpha^2 + 2\beta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1 \text{ 에서}$$

$$(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$$

$$\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, \ 2q(p - 1) = 0$$

$$q \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$p = 1, \ q^2 = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \ \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\therefore b = -2, \ c = 3$$

$$\therefore b + c = 1$$

22. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$$

$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$$

$$= 3 \cdot 2 - 12$$

$$= -6$$

23. $x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$$\begin{aligned}y &= a(x+3)^2 + 4 \\&= a(x^2 + 6x + 9) + 4 \\&= ax^2 + 6ax + 9a + 4\end{aligned}$$

$$9a + 4 = 2, \quad 9a = -2 \quad \text{이므로} \quad a = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$$

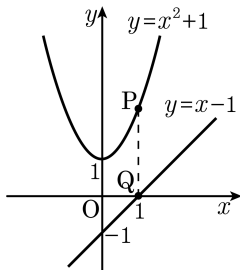
$$\therefore abc = \left(-\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times 2 = \frac{16}{27}$$

24. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에
평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는
점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{3}$

② $\frac{7}{4}$
⑤ $\frac{5}{2}$

③ $\frac{6}{5}$



해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의
x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를
($t, t^2 + 1$) 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 ($t, t - 1$)

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

25. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

① 90 cm^2

② 92 cm^2

③ 94 cm^2

④ 96 cm^2

⑤ 98 cm^2

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x \text{ cm}$, 높이를 $y \text{ cm}$ 라 하면

$$y = \frac{1}{2}x(28 - x)$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2 + 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 98$$