

1. 두 수의 대소관계가 옳지 않은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $-\sqrt{3} > -\sqrt{2}$

㉡ $-2\sqrt{2} > -\sqrt{12}$

㉢ $\sqrt{11} > 2\sqrt{3}$

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $2 < 3$ 이므로 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

따라서 $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ 이다.

㉡ $-2\sqrt{2} > -\sqrt{12}$ (○)

㉢ $\sqrt{11}^2 = 11 < 12 = (2\sqrt{3})^2$ 이므로 $\sqrt{11} < 2\sqrt{3}$

2. 다음 세 수 $a = 4 - \sqrt{7}$, $b = 2$, $c = 4 - \sqrt{8}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < a < c$

④ $b < c < a$

⑤ $c < a < b$

해설

$$1 < a < 2 \text{ 이고}$$

$$-\sqrt{9} < -\sqrt{8} < -\sqrt{4}$$

$$4 - \sqrt{9} < 4 - \sqrt{8} < 4 - \sqrt{4}$$

$$\therefore 1 < 4 - \sqrt{8} < 2$$

$$\therefore 1 < c < 2$$

$$a - c = (4 - \sqrt{7}) - (4 - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7} > 0$$

$$\therefore a > c$$

$$\therefore c < a < b$$

3. $\sqrt{12} \times \sqrt{15} \times \sqrt{35} = a\sqrt{7}$ 일 때, a 의 값은?

① 15

② 20

③ 25

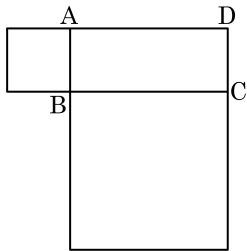
④ 30

⑤ 35

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{12} \times \sqrt{15} \times \sqrt{35} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{3 \times 5} \times \sqrt{5 \times 7} \\ &= 30\sqrt{7} \end{aligned}$$

4. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 를 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그렸더니 그 넓이가 각각 12, 75 이 되었다. 이 때, 직사각형 ABCD 의 넓이는?



- ① $10\sqrt{3}$ ② 15 ③ $15\sqrt{3}$
 ④ 30 ⑤ $30\sqrt{3}$

해설

$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ 라고 하면,

$$a^2 = 12, a = 2\sqrt{3},$$

$$b^2 = 75, b = 5\sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD = ab = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 30$$

5. 이차방정식 $(x-6)(2x-1)=0$ 의 해는?

① $x=6$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

② $x=-6$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

③ $x=6$ 또는 $x=1$

④ $x=-6$ 또는 $x=-1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=2$

해설

① $x-6=0$ 또는 $2x-1=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

6. 이차방정식 $(x-5)^2 - 6 = 0$ 을 풀면?

① $x = 5$ 또는 $x = -1$

② $x = 5 \pm \sqrt{6}$

③ $x = -5 \pm \sqrt{6}$

④ $x = 5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $x = 0$ 또는 $x = 1$

해설

$$(x-5)^2 = 6$$

$$x-5 = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x = 5 \pm \sqrt{6}$$

7. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt{81} = \pm 9$
- ② 음수의 제곱근은 두 개이다.
- ③ 제곱근 0.49 는 ± 0.7 이다.
- ④ 6.4 의 제곱근은 0.8 이다.
- ⑤ 0의 제곱근은 한 개이다.

해설

- ① $\sqrt{81} = 9$
- ② 음수의 제곱근은 없다.
- ③ 제곱근 $0.49 = \sqrt{0.49} = 0.7$
- ④ 6.4의 제곱근 $= \pm \sqrt{6.4}$

8. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 의 분모를 유리화하는데 이용하면 편리한 공식은?

① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

⑤ $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

해설

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 에 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 를 곱해야 하므로 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 를 이용한다.

9. 두 다항식 $x^2 - 4x + a$, $2x^2 - bx - 9$ 의 공통인 인수가 $x - 3$ 이라 할 때, 나머지 인수들의 합을 구하면?

① $x - 2$

② $3x + 2$

③ $2x - 3$

④ $2x + 1$

⑤ $-x - 1$

해설

$$x^2 - 4x + a = (x - 3)(x + k) = x^2 + (k - 3)x - 3k \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } k - 3 = -4, k = -1, a = -3k = 3 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - bx - 9 &= (x - 3)(2x + m) \\ &= 2x^2 + (m - 6)x - 3m \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } -3m = -9, m = 3, m - 6 = -b, b = 3 \text{ 이므로}$$

$$2x^2 - 3x - 9 = (2x + 3)(x - 3) \text{ 이다.}$$

$$\text{나머지 인수들의 합은 } (x - 1) + (2x + 3) = 3x + 2 \text{ 이다.}$$

10. $x^2 + \square x - 6$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, $\square$ 안에 알맞은 정수가 아닌 것은?

①

-2

② -1

③ 1

④ 5

⑤ -5

해설

② $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

③ $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

④ $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

⑤ $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$

11. 직사각형의 넓이가 $(a + b)(a + b + 1) - 30$ 이고, 가로 길이가 $(a + b + 6)$ 일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이를 구하면?

① $4a + 2b + 4$

② $4a - 2b - 2$

③ $4a - 4b + 2$

④ $4a + 4b + 2$

⑤ $4a + 4b - 2$

해설

$a + b = A$ 라 두면

$$A(A + 1) - 30 = A^2 + A - 30$$

$$= (A + 6)(A - 5)$$

$$= (a + b + 6)(a + b - 5)$$

세로 : $a + b - 5$

둘레 : $2(a + b - 5 + a + b + 6) = 4a + 4b + 2$ 이다.

12. $75x^2 - 12y^2 = a(bx + cy)(bx - cy)$ 일 때, 자연수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 10

② 15

③ 20

④ 26

⑤ 28

해설

$$75x^2 - 12y^2 = 3(25x^2 - 4y^2) = 3(5x + 2y)(5x - 2y)$$

$$\therefore a = 3, b = 5, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 10$$

13. 다항식 $(m+n)^2 - 2(m+n)m - 8m^2$ 을 다항식 두 개의 곱으로 나타낼 때 일차식들의 합은?

① 0

② $-2n$

③ $m+n$

④ $2n$

⑤ $2m$

해설

$m+n = X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} X^2 - 2mX - 8m^2 &= (X - 4m)(X + 2m) \\ &= (m + n - 4m)(m + n + 2m) \\ &= (n - 3m)(3m + n) \end{aligned}$$

$$\therefore (n - 3m) + (3m + n) = 2n$$

14. $(x + y)(x + y - 1) - 20$ 을 바르게 인수분해 한 것은?

① $(x + y - 5)(x + y + 4)$

② $(x + y - 4)(x + y + 5)$

③ $(x + y - 5)(x + y - 4)$

④ $(x - y - 4)(x - y + 5)$

⑤ $(x - y - 5)(x - y + 4)$

해설

$x + y = A$ 라고 하면

$$(x + y)(x + y - 1) - 20$$

$$= A(A - 1) - 20$$

$$= A^2 - A - 20$$

$$= (A - 5)(A + 4)$$

$$= (x + y - 5)(x + y + 4)$$

15. $(x-3)(x+1) - (x-3)^2 + 6(x+1)^2$ 을 인수분해하면?

① $(3x+2)(x+2)$

② $2(3x-1)(x+3)$

③ $2(3x+1)(x-3)$

④ $4(2x-2)(x+3)$

⑤ $-2(3x-2)(x-3)$

해설

$x+1=A$, $x-3=B$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} & 6(x+1)^2 + (x-3)(x+1) - (x-3)^2 \\ &= 6A^2 + AB - B^2 = (2A+B)(3A-B) \\ &= \{2(x+1) + (x-3)\} \{3(x+1) - (x-3)\} \\ &= (3x-1)(2x+6) = 2(3x-1)(x+3) \end{aligned}$$

16. $x = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $2x^2 - 8x + 4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}x - 2 &= -\sqrt{2} \text{ 이므로} \\(\text{준식}) &= 2(x^2 - 4x) + 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 4 \\&= 2(-\sqrt{2})^2 - 4 \\&= 0\end{aligned}$$

17. x 값의 범위가 $0 \leq x < 2$ 일 때, 이차방정식 $2x^2 - 7x + 6 = 0$ 을 만족시키는 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

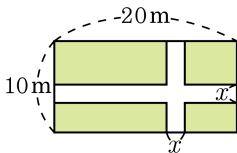
해설

$$2x^2 - 7x + 6 = (2x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}, x = 2$$

x 의 범위가 $0 \leq x < 2$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$ 이다.

18. 가로 길이가 20m, 세로 길이가 10m인 직사각형 모양의 화단에 다음 그림과 같이 폭이 x m로 일정한 길을 만들었더니 길을 제외한 화단의 넓이가 144m^2 가 되었다. 이 길의 폭을 구하여라.



▶ 답 : m

▷ 정답 : 2 m

해설

도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 나머지 부분의 넓이는
 가로 길이가 $(20 - x)$ m, 세로 길이가 $(10 - x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$$(20 - x)(10 - x) = 144$$

$$x^2 - 30x + 56 = 0$$

$$(x - 2)(x - 28) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ (단, } 0 < x < 10 \text{)}$$

19. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$ 이다.

② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = a$

③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$ 이다.

④ $\sqrt{a^2} = |a|$ 이다.

⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = 3a$ 이다

해설

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$

② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = -(-a) = a$

③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$

④ a 의 부호와 관계없이 $\sqrt{a^2} = |a|$

⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = -3a$

20. 두 자연수 a, b 에 대하여 $\sqrt{270a} = b$ 일 때, $a + b$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 120

해설

$$\sqrt{270a} = \sqrt{3^3 \times 2 \times 5 \times a}$$

근호 안의 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 하므로 $a = 3 \times 2 \times 5 = 30$ 이다.

a 를 대입하면 $\sqrt{270a} = \sqrt{3^3 \times 2 \times 5 \times a} = \sqrt{3^4 \times 2^2 \times 5^2} = 3^2 \times 2 \times 5 = b$ 이다.

따라서 $b = 90$ 이다.

21. $2 < \sqrt{|x-4|} < 3$ 을 만족하는 정수 x 의 값은 몇 개인가?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$2 < \sqrt{|x-4|} < 3$$

$x-4 \geq 0$ 일 때

$$4 < x-4 < 9, 8 < x < 13$$

$$x = 9, 10, 11, 12$$

$x-4 < 0$ 일 때,

$$-9 < x-4 < -4, -5 < x < 0$$

$$x = -4, -3, -2, -1$$

22. 다음 두 수 6 과 15 사이에 있는 정수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 이 무리수인 n 의 개수는?

- ① 11 개 ② 10 개 ③ 9 개 ④ 8 개 ⑤ 7 개

해설

7 ~ 14 까지의 정수 중 $3^2 = 9$ 제외.

7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 (7 개)

23. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 일 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(39) + f(40)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{40} - 1$

② $\sqrt{40} + 1$

③ $\sqrt{41} - 1$

④ $\sqrt{41} + 1$

⑤ $\sqrt{41} - \sqrt{40}$

해설

$$f(1) = \sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{3} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$f(3) = \sqrt{4} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdots$$

$$f(39) = \sqrt{40} - \sqrt{39} = -\sqrt{39} + \sqrt{40}$$

$$f(40) = \sqrt{41} - \sqrt{40} = -\sqrt{40} + \sqrt{41}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(39) + f(40)$$

$$= (-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \cdots + (-\sqrt{39} + \sqrt{40}) + (-\sqrt{40} + \sqrt{41}) = -1 + \sqrt{41}$$

24. $x = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}, y = \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 + y^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 86

해설

$$x^2 = 5 + 3\sqrt{2}, y^2 = 5 - 3\sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10, x^2 y^2 = 7$$

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = 100$$

$$\text{따라서 } x^4 + y^4 = 100 - 2x^2 y^2 = 100 - 14 = 86 \text{ 이다.}$$

25. 다음 제공근표를 이용하여 $\sqrt{2004}$ 의 값을 구하면?

수	0	1	2	3	4
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010
5.0	2.230	2.238	2.241	2.243	2.245

① 44.72

② 34.64

③ 34.70

④ 34.76

⑤ 44.76

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{2004} &= \sqrt{4 \times 501} = 2\sqrt{501} \\ &= 2 \times \sqrt{5.01 \times 100} \\ &= 20\sqrt{5.01}\end{aligned}$$

주어진 표에서 $5.01 = 2.238$

$$\therefore 20 \times 2.238 = 44.76$$

26. 한 개의 주사위를 두 번 던져 처음 나온 눈의 수를 m , 두 번째 나온 눈의 수를 k 라고 할 때,

이차방정식 $mx^2 + (k-2)x + 2 = 0$ 의 근이 중근이 되는 확률을 $\frac{b}{a}$ 라고 한다. $a+b$ 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$D = (k-2)^2 - 8m = 0$$

$$(k-2)^2 = 8m \text{ 이므로}$$

$$(m, k) = (2, 6) \text{ 이다.}$$

$$\text{확률은 } \frac{1}{36} \text{ 이다.}$$

$$\therefore a+b = 37$$

27. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k + a)x + (k^2 - k + b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $8ab$ 의 값은?

① -2

② 2

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

$$D/4 = (k + a)^2 - (k^2 - k + b) = 0$$

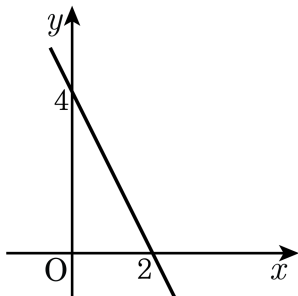
k 에 대해서 정리하면

$$(2a + 1)k + a^2 - b = 0, \text{ 이 식이 } k \text{ 에 관한 항등식이므로 } 2a + 1 = 0, \quad a^2 - b = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 8ab = 8 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right) = -1$$

28. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



- ① 2 ② -2 ③ $\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$

$$\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$$

두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.

이차방정식의 두 근을 α , β 라고 하면,

두 근의 차 $|\alpha - \beta|$ 는

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 에서}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \text{ 이므로}$$

두 근의 차는

$$\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

29. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 + a - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha + \beta$ 의 범위는 $m < \alpha + \beta < n$ 이다.
 $m + n$ 의 값은?

① 1

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = a^2 + a - 1$$

서로 다른 두 근을 가지므로

$$a^2 - 4a^2 - 4a + 4 > 0$$

$$(3a - 2)(a + 2) < 0$$

$$-2 < a < \frac{2}{3}$$

그런데 $\alpha + \beta = -a$ 이므로

$$-\frac{2}{3} < \alpha + \beta < 2$$

$$\therefore m + n = \frac{4}{3}$$

30. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하는데 소연은 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 가 나왔고, 소희는 상수항을 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 2 \pm \sqrt{6}$ 이 나왔다. 이 때, ab 의 값은?

① -4

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b 이다.

소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 소연이가 구한 두 근의 곱은

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 = b$$

한편, 소희는 일차항을 제대로 본 것이므로 소희가 구한 두 근의 합은

$$(2 + \sqrt{6}) + (2 - \sqrt{6}) = -a$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

소연이 푼 식은

$$\{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} = 0$$

소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 구하는 상수항 $b = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$

소희가 푼 식은

$$\{x - (2 + \sqrt{6})\} \{x - (2 - \sqrt{6})\} = 0$$

소희는 일차항의 계수를 제대로 본 것이므로 일차항의 계수는 $a = -2 + \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -4$

따라서, 처음 이차방정식은 $x^2 - 4x - 1 = 0$

$$\therefore ab = 4$$

31. 5의 음의 제곱근을 a , 2의 양의 제곱근을 b 라 할 때, $\sqrt{-a^2 + 3b^2} - \sqrt{(a^2 \times b^2)^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$$a = -\sqrt{5}, b = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{-a^2 + 3b^2} - \sqrt{(a^2 \times b^2)^2} \\ &= \sqrt{-(-\sqrt{5})^2 + 3(\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\left\{ (-\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{2})^2 \right\}^2} \\ &= \sqrt{-5 + 6} - \sqrt{(5 \times 2)^2} \\ &= 1 - 10 = -9 \end{aligned}$$

32. $\sqrt{59+a} = b$ 라 할 때, b 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a 와 그 때의 b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 64, 81, 100, ... 이므로

$$59 + a = 64, 81, 100 \dots$$

$$\therefore a = 5, 22, 41, \dots$$

따라서 가장 작은 자연수 $a = 5$, $b = \sqrt{59+5} = 8$ 이다.

$$\therefore a + b = 5 + 8 = 13$$

33. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 정할 때 $-a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-a + b = 21$

해설

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + cx + d)^2$$

$$= x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2$$

양변의 계수를 비교하면 된다.

$$\text{즉, } 4 = 2c, \quad -2 = c^2 + 2d, \quad a = 2cd, \quad b = d^2$$

$$\therefore c = 2, \quad d = -3, \quad a = -12, \quad b = 9$$

$$\therefore -a + b = 12 + 9 = 21$$

34. 44444444 - 8888 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 어떤 자연수를 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6666

해설

4444 = a 로 놓으면

44444444 = 44440000 + 4444 = $a \times 10^4 + a$ 이고 8888 = $2 \times 4444 = 2a$ 이므로

$$\begin{aligned} 44444444 - 8888 &= a \times 10^4 + a - 2a \\ &= a \times 10^4 - a \\ &= a(10^4 - 1) \\ &= a \times 9999 \\ &= 4444 \times 9999 \\ &= 4 \times 1111 \times 9 \times 1111 \\ &= 36 \times 1111^2 \\ &= (6 \times 1111)^2 \end{aligned}$$

따라서 어떤 자연수는 6666 이다.

35. x 에 관한 이차방정식 $ax^2 + px + ap + q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 2$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x = 2$ 를 대입하면

$$4a + 2p + ap + q = 0$$

$$(4 + p)a + 2p + q = 0$$

a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4 + p = 0, 2p + q = 0$$

$$p = -4, 2p + q = 0, q = 8$$

$$\therefore p + q = -4 + 8 = 4$$

36. 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 한 근 p 가 $1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 을 만족할 때, ap 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = p$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$p^2 + ap + 2 = 0, p^2 + ap = -2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 의 양변에 p^2 을 곱하면

$$p^2 - 2 + ap + 2p = 0, p^2 + ap = 2 - 2p \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -2 = 2 - 2p \quad \therefore p = 2$$

$p = 2$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore ap = (-3) \times 2 = -6$$

37. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2ax - x + 2a = 0$ 과 $2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$ 이 공통근을 가질 때, a 의 값을 구하여라. (단, $-4 < a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$x^2 - 2ax - x + 2a = 0$$

$$(x-1)(x-2a) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2a$$

$$2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$$

$$(x+a+3)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -a-3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$(i) \ 2a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } a = \frac{1}{4}$$

$$(ii) \ -a-3 = 1 \text{ 일 때, } a = -4$$

$$(iii) \ 2a = -a-3 \text{ 일 때, } a = -1$$

따라서 $-4 < a < 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

38. 두 실수 x, y 에 대하여 $x = a + 6\sqrt{3}$, $y = 1 + 2\sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y = 6$ 이 성립하는 a 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(x - 3y)^2 + (x - 3y) - 6 = 0$ 에서 $x - 3y = X$ 로 치환 하면

$$X^2 + X - 6 = 0$$

$$(X + 3)(X - 2) = 0$$

$$(x - 3y + 3)(x - 3y - 2) = 0$$

$x = a + 6\sqrt{3}$, $y = 1 + 2\sqrt{3}$ 을 대입하면

$$(a - 3 + 3)(a - 3 - 2), a(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 5$$

$$\therefore 0 + 5 = 5$$

39. 이차방정식 $p^2x^2 - 3x - q = 0$ 이 서로 다른 두 자연수 α, β 를 근으로 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$p^2x^2 - 3x - q = 0$ 은 서로 다른 두 자연수 α, β ($\alpha \neq \beta$) 를 근으로 가지므로

$$\alpha + \beta = \frac{3}{p^2}, \alpha\beta = -\frac{q}{p^2}$$

이때, α, β 가 자연수이므로 $\alpha + \beta = \frac{3}{p^2}$ 도 자연수이다.

$$\therefore p^2 = 1 \text{ 또는 } p^2 = 3$$

$$\therefore \alpha + \beta = 3 \text{ 또는 } \alpha + \beta = 1$$

여기서 α, β 는 서로 다른 자연수이므로 $\alpha + \beta = 1$ 이 될 수 없다.
따라서 $p^2 = 1$ 이고 $\alpha + \beta = 3$ 이다.

$$\alpha + \beta = 3 \text{ 에서 } \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = 2, \beta = 1$$

$$\alpha\beta = -\frac{q}{p^2} \text{ 이므로 } q = -2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + p^2 + q^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + p^2 + q^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$$

40. 원가가 A 원인 어떤 물건에 $x\%$ 의 이익을 붙여 정가를 매겼다가 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하여 팔면 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보게 된다. 이때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

원가 A 원에 $x\%$ 의 이익을 붙이면 정가는

$A \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원이고, 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하면 판매가는 $A \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이때 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보았으므로

$(\text{판매가}) - (\text{원가}) = -\frac{A}{25}$ 에서

$$A \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right) - A = -\frac{A}{25}$$

$$A \left(1 - \frac{x^2}{10000}\right) = \frac{24}{25}A$$

$$1 - \frac{x^2}{10000} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore x = \pm 20$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.