1. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10$, $b-a=0$

2. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$　② $x = \sqrt{2}$　③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$　⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

3. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로

$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a의 값의 합은 -4

4. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5　　② -4　　③ -1　　④ 1　　⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3+2=-1$

5. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$ $\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

6. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

7. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

8. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $2x+1$　② $x+1$　③ $x-1$

④ $2x-1$　⑤ $3x+2$

해설

$f(x) = (x+1)Q_1(x) - 2$

$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 1$

$f(x) = (x+1)(x-2)Q_3(x) + ax + b$

$f(-1) = -a + b = -2,\ f(2) = 2a + b = 1$

$\therefore\ a = 1,\ b = -1$

구하는 나머지는 $x-1$

9. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{aligned}
& a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\
&= (b-c)a^2 - \boxed{(가)}\,a + \boxed{(나)}\,(b-c) \\
&= \boxed{(다)}\,\{a^2 - \boxed{(라)}\,a + \boxed{(나)}\} \\
&= (b-c)(a-b)\boxed{(마)}
\end{aligned}
$$

① (가) (b^2-c^2) ② (나) bc ③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$ ⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$
\begin{aligned}
& a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\
&= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
&= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2-c^2)}\,a + \boxed{bc}\,(b-c) \\
&= \boxed{(b-c)}\left\{a^2 - \boxed{(b+c)}\,a + \boxed{bc}\right\} \\
&= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
\end{aligned}
$$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2am - 2m + b$의 그래프가 m의 값에 관계없이 x축에 접할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 2am - 2m + b = 0$에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2am - 2m + b) = 0$$

$\therefore a^2 - 2am + 2m - b = 0$

이 식이 m의 값에 관계없이 성립하므로

$(2 - 2a)m + (a^2 - b) = 0$에서

$2 - 2a = 0,\ a^2 - b = 0$

따라서 $a = 1,\ b = 1$이므로 $ab = 1$

11. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢
② ㉡
③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㉠, ㉡

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㉢

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㉣

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

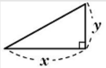
$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㉤

12. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x+y=21 \cdots ① \\ x^2+y^2=15^2 \cdots ② \end{cases}$$ 이다.

①에서 $y=21-x$ 를 ②에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=15^2$

$x^2+21^2-42x+x^2=15^2$

$2x^2-42x+21^2-15^2=0$

$2x^2-42x+(21+15)(21-15)=0$

$x^2-21x+3\times 36=0$

$(x-12)(x-9)=0$,

$x=12$ 또는 $x=9$

$x=12$ 일 때 $y=9$

$x=9$ 일 때 $y=12$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

14. 아래에서 ㉮ ~ ㉱의 (　) 안에 들어갈 부등호를 순서대로 적으면?

> 모든 실수 x에 대하여
> [I] 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 이
> 항상 성립할 조건은
> a(㉮)0 이고 b^2-4ac(㉯)0 이다.
> [II] 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$ 이
> 항상 성립할 조건은
> a(㉰)0 이고 b^2-4ac(㉱)0 이다.

① $>$, $<$, $<$, $\ge$　② $>$, $>$, $<$, $\le$　③ $>$, $<$, $\le$, $\le$

④ $>$, $>$, $\le$, $\le$　⑤ $>$, $<$, $<$, $\le$

해설

모든 실수 x에 대하여
[I] 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 이
항상 성립할 조건은
$a(>)0$ 이고 $b^2-4ac(<)0$ 이다.
[II] 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$ 이
항상 성립할 조건은
$a(<)0$ 이고 $b^2-4ac(\le)0$ 이다.

15. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개

④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29 + 1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N 의 양의 약수의 개수는
$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$

16. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로
$$\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$$
$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$
$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

17. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0, \quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1 인 것은 없거나 2 개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$

18. 1개에 1,000 원 하는 볼펜과 1 개에 2,000 원 하는 노트를 합쳐서 30 개를 사려고 한다. 노트를 볼펜보다 많이 사고 전체 금액이 54,000 원 이하가 되도록 하려고 한다. 노트를 최소 a 개, 최대 b 개 살 수 있다면, $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \times b = 384$

해설

노트의 개수를 x 라고 놓으면 볼펜의 개수는 $30 - x$ 이다. 노트를 볼펜보다 많이 사게 되면 $x > 30 - x$ 이다.
볼펜과 노트를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $2000x + 1000(30 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 54,000 원 이하가 되어야 하기 때문에 $2000x + 1000(30 - x) \leq 54000$ 이다.
위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 30 - x \\ 2000x + 1000(30 - x) \leq 54000 \end{cases}$$ 이다.

이를 간단히 하면 $\begin{cases} x > 15 \\ x \leq 24 \end{cases}$ 이다.

따라서 $15 < x \leq 24$ 이다.
그러므로 노트는 최소로 16 개, 최대로 24 개 살 수 있다.
따라서 $a = 16$, $b = 24$ 이다.
$\therefore 16 \times 24 = 384$

19. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p,q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

($a<0$ 이므로) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0\ (\because a<0)$

$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

20. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$
④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

21. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　　② α　　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

22. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$a = 1 \quad \boxed{4} = b$

$\therefore 2c - bd = -4$

23. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4　　② 3　　③ 1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b-c=2+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$

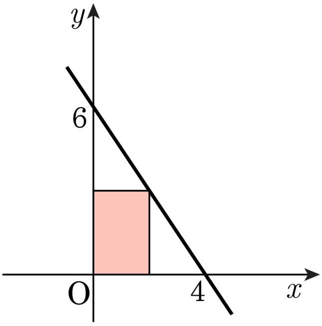
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

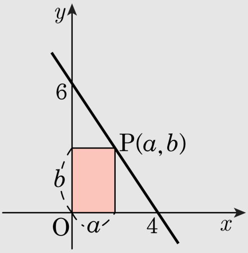
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

24. 다음 그림과 같이 직사각형의 두 변이 x 축, y 축 위에 있고, 네 꼭짓점 중 하나는 직선 $3x+2y=12$ 위에 있다. 이 직사각형의 넓이가 최대일 때, 네 변의 길이의 합은?



① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설



직사각형의 가로 a , 세로 b라 하면 $a>0$, $b>0$

$\mathrm{P}(a,\ b)$는 직선 $3x+2y=12$ 위의 점이므로

$3a+2b=12$

$b=6-\frac{3}{2}a$, $a>0$, $b=6-\frac{3}{2}a>0$, $a<4$

$\therefore 0<a<4$

또 직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= ab = a(6-\frac{3}{2}a) = -\frac{3}{2}a^2+6a \\ &= -\frac{3}{2}(a^2-4a) = -\frac{3}{2}(a-2)^2+6 \end{aligned}$$

(단, $0<a<4$)

$a=2$일 때, 최댓값 6을 갖고

이 때, $b=6-\frac{3}{2}a=3$이다.

이 때, 직사각형 네 변의 길이의 합은 $2(a+b)=10$

25. 양의 유리수 a 에 대하여 $n^2 \le a < (n+1)^2$ 을 만족하는 정수 $n = P(a)$ 로 정의한다. $P(x) = 4$, $P(y) = 6$ 일 때, $P(y-x)$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

해설

$P(x) = 4$ 이므로 $4^2 \le x < 5^2$ $\quad \therefore\ 16 \le x < 25$
$P(y) = 6$ 이므로 $6^2 \le y < 7^2$ $\quad \therefore\ 36 \le y < 49$
따라서 $11 < y - x < 33$
즉, $3^2 < y - x < 6^2$ 이므로 $P(y-x)$ 가 될 수 있는 값은 3, 4, 5