1. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

2. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

따라서 최대공약수는 $x+1$

3. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0$, $g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1 \therefore\ a+b=2$

4. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$
② $x^2+2x+5=0$
③ $x^2+5x+2=0$
④ $x^2-2x+5=0$
⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$
$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$
$\therefore x^2-2x+5=0$

5. $x = 0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$
② $y = (x-2)^2 - 3$
③ $y = -2(x-1)^2 + 3$
④ $y = -(x+1)^2 + 3$
⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y = ax^2 - 1$
$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3 = 4a - 1$
$a = -\frac{1}{2}$
$\therefore\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$

7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6
④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설
(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

8. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 $x,\ y,\ z$라 하면

$x+y+z=22\cdots\cdots$①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14\cdots\cdots$②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

9. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2\,(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

10. 다음 ㉠~㉣중 인수분해를 한 결과가 <u>틀린</u> 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x+y)(x-y)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x-2y)(3x+y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2-5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2=(2x-y+2)(x-y+1)$

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)=(a-b)(x^2+y^2)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x+2y)(3x-y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$

$=2x^2-(4+y)x-(y^2-y-2)$

$=2x^2-(4+y)x-(y-2)(y+1)$

$=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$

$=(2x+y-2)(x-y-1)$

11. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$을 인수분해 하면?

① $(x^2-x-5)(x^2+x-9)$ ② $(x^2-x-5)(x^2-x-9)$
③ $(x^2+x+5)(x^2+x+9)$ ④ $(x^2+x-5)(x^2+x-9)$
⑤ $(x^2-x+5)(x^2+x+9)$

해설

(준식) $=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+21$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$
$x^2+x=A$로 치환하면,
$(A-2)(A-12)+21=A^2-14A+45$
$=(A-9)(A-5)$
$\therefore\ (x^2+x-9)(x^2+x-5)$

12. $\dfrac{2006^3-1}{2006\times 2007+1}$ 의 값을 구하면?

① 2005 ② 2006 ③ 2007 ④ 2008 ⑤ 2009

해설

$a=2006$ 로 놓으면

$$(\text{준식})=\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$
$$=a-1=2005$$

13. $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots-100i^{100}=a+bi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -100　② -50　③ 0　④ 25　⑤ 50

해설

준식$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$

$=\{(1+5+9+\cdots+97)-(3+7+\cdots+99)\}i$

$\quad+\{(2+6+\cdots+98)-(4+8+\cdots+100)\}$

$=(1225-1275)i+(1250-1300)=-50-50i$ 따라서 $a=-50$, $b=-50$ 이므로 $a+b=-100$

14. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^4 + \beta^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13$

$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$= (13)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$= (13)^2 - 2(-2)^2 = 161$

15. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7-2=(x^3+x)Q(x)+R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 16

해설

$R(x)=ax^2+bx+c(a,\ b,\ c$는 실수$)$라 하면
$x^7-2=x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=0$을 대입하면 $-2=c$
$x^7-2=x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx-2\cdots$①
①의 양변에 $x=i$을 대입하면
$-i-2=-a+bi-2$
$a=0,\ b=-1$이므로 $R(x)=-x-2$
$\therefore\ x^7-2=(x^3+x)Q(x)-x-2$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-1=2Q(1)-3$이므로
$\therefore\ Q(1)=1$

16. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

17. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면
$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\,\bar{w}$
$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

18. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$

$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

19. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하면,

$y = x(16 - x)$
$= -x^2 + 16x$
$= -(x^2 - 16x)$
$= -(x - 8)^2 + 64$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

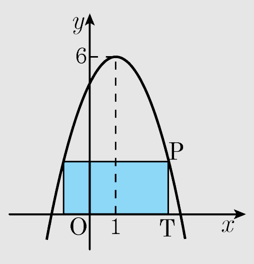
20. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, \ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1) - t^2 + 2t + 5] \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

21. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

22. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$ ①, $y^2 - x = i \cdots$ ② 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore \ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

23. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

24. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x) = x^2 + bx + a$에 대하여 $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$가 성립할 때, $a + b$의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = b$

$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots$ ㉠

$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡하면

$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$

$\alpha \neq \beta$이므로 $\alpha + \beta + b + 1 = 0$

$\therefore\ -a + b + 1 = 0 \cdots$ ㉢

㉠ $+$ ㉡하면

$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2\alpha = \alpha + \beta$

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$

$\therefore\ a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots$ ㉣

㉢에서 $b = a - 1$을 ㉣에 대입하면

$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0,\ 2a + 2 = 0$

$\therefore\ a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -3$

25. 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $h(g(f(M)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

$g(f(x)) = 2(2x-1)^2$,
$h(g(f(x))) = -2(2x-1)^2 + 2$ 이므로
$M = 2$
$\therefore\ h(g(f(m))) = -2(2M-1)^2 + 2 = -16$