

1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1, 1, 2$$

$$\therefore -1+1+2=2$$

2. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근 중에서 최대의 근은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $x = 1, x = -1$ 을 대입하면 성립하므로
 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 $= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
 $= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -3, -1, 1, 2$
따라서 최대의 근은 2

3. 점 $(0, -2)$ 를 지나고 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x - 1$ 또는 $y = -x - 2$
② $y = x - 2$ 또는 $y = -3x - 1$
③ $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$
④ $y = 3x - 3$ 또는 $y = x + 1$
⑤ $y = 4x - 4$ 또는 $y = 5x + 3$

해설

점 $(0, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 라 하고
이 식과 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 를 연립하면
 $x^2 - 2x + 2 = mx - 2$, $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
 $D = (m+2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$
 $m^2 + 4m - 12 = 0 \quad (m+6)(m-2) = 0$
 $\therefore m = 2$ 또는 $m = -6$
따라서, 구하는 직선의 방정식은
 $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

4. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$
 $\therefore y_1 y_2 = (-x_1 + 3)(-x_2 + 3)$
 $= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9$
 $= -2 + 12 + 9 = 19$

5. $2x + y = 3$ 일 때, $x^2 + xy + 1$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

해설

$2x + y = 3$ 에서 $y = -2x + 3$ 이다.

$$x^2 + xy + 1 = x^2 + x(-2x + 3) + 1$$

$$= -x^2 + 3x + 1$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

따라서 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

6. $x = -1$ 일 때, 최댓값 5 를 갖고, 점 $(0, 2)$ 를 지나는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -5

③ -7

④ 3

⑤ 5

해설

$$y = a(x + 1)^2 + 5 \text{ 에 } (0, 2) \text{ 를 대입하면 } a = -3$$

$$y = -3(x + 1)^2 + 5 = -3x^2 - 6x + 2$$

$$\therefore a + b + c = -7$$

7. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
 $= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$
이 때, x, y, z 가 실수이므로
 $(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1 이다.

8. 가로와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하면?

㉠ 36 ㉡ 16 ㉢ 12 ㉣ 10 ㉤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= x \times (12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 36이 최댓값이다.

9. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m ② 55m ③ 50m ④ 45m ⑤ 40m

해설

$$\begin{aligned} h &= 30t - 5t^2 \\ &= -5(t^2 - 6t + 9) + 45 \\ &= -5(t - 3)^2 + 45 \end{aligned}$$

10. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면
 $X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2$$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

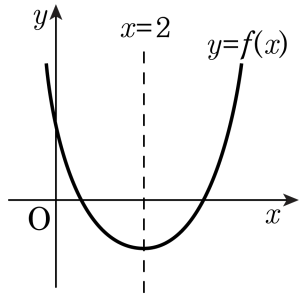
$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

11. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

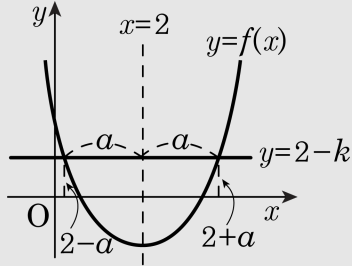
해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$$t = 2 - k \text{ 또는 } t = 2 + k$$

($0 < k < 2$)로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x) = 2 - k \text{ 또는 } f(x) = 2 + k$$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = 2 - a \text{ 또는 } x = 2 + a$$

(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$$

12. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 2a+4 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -(a+2)$, $\alpha\beta = 2a+4$ 이므로

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$

$= (a+2)^2 - (2a+4) = a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1$

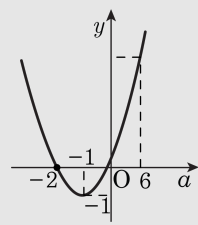
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$D = (a+2)^2 - 4(2a+4) \geq 0$

$a^2 - 4a - 12 \geq 0$, $(a+2)(a-6) \geq 0$

$\therefore a \leq -2$, $a \geq 6$

따라서, $y = (a+1)^2 - 1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



그러므로 $a = -2$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.

13. 원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

㉠ $3 + 2\sqrt{2}$

㉡ $2 + \sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3}$

㉣ 6

㉤ $6 + \sqrt{2}$

해설

$$\frac{y}{x} = t \text{ 라고 놓으면 } y = tx \dots\dots\dots \text{㉠}$$

㉠을 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 에 대입하여 정리하면

$$(t^2 + 1)x^2 - 6(t+1)x + 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} \geq 0 \text{ 이므로 } 9(t+1)^2 - 12(t^2 + 1) \geq 0$$

$$t^2 - 6t + 1 \leq 0$$

$$\therefore 3 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.

14. 삼차방정식 $x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12} = 0$ 의 세 근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, $\alpha \leq m \leq \gamma$ 인 정수 m 의 개수를 구하면?

- ① 23개 ② 24개 ③ 25개 ④ 26개 ⑤ 27개

해설

$f(x) = x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3) = f(2^4) = f(2^5) = 0$ 이므로
 $f(x) = (x - 2^3)(x - 2^4)(x - 2^5)$
 $\alpha < \beta < \gamma$ 에서 $\alpha = 2^3, \gamma = 2^5$ 이므로
 $2^3 \leq m \leq 2^5$
 $\therefore$ 정수 m 의 개수는 $2^5 - 2^3 + 1 = 25$

15. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$