1. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

2. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+5 \\ &= -2(x^2-2x+1)+5 \\ &= -2x^2+4x+3 \end{aligned}$$

$\therefore y=-2x^2+4x+3$

3. $f(x)$가 x의 다항식일 때, $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때, $2a-b$의 값을 구하면?

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

해설

준 식의 양변에
$x^2=2$를 대입하면 $4a+b=-16$
$x^4=-1$을 대입하면 $-a+b=-1$
$\therefore\ a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ 2a-b=-2$

4. $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$

x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=0$

5. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1$, $b=3$
② $a=1$, $b=3$
③ $a=3$, $b=-1$
④ $a=-3$, $b=-1$
⑤ $a=3$, $b=1$

해설

x^3+ax^2+bx+3
$=(x^2+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2+x+c$
$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$
따라서 $a=3$, $b=1$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax-a+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2=4$를 만족한다. 이 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2　② 4　③ 0, 2　④ −4, 0　⑤ −4, 2

해설

$\alpha+\beta=-a$

$\alpha\beta=-a+2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-a)^2-2(-a+2) \\ &= a^2+2a-4\end{aligned}$$

$a^2+2a-4=4,\ a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0\ \therefore\ a=-4, 2$

7. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c \rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

8. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$가 된다고 할 때, $a + b + c + d$의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ (← x에 관하여 정리)
$= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12)$
$= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6)$
$= \{x + (y + 2)\}\{2x - (y - 6)\}$
$= (x + y + 2)(2x - y + 6)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 2,\ c = -1,\ d = 6$
$\therefore\ a + b + c + d = 8$

9. 두 양의 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$　② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y}) - 2 = 0$

$\frac{x}{y} = t$라 하면 $(t > 0)$

$2t^2 + t - 2 = 0$

근의 공식에 대입하면

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore t = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t > 0)$ $\frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

10. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

해설

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha) = 0$,
$1-\alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n+1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

11. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

공통근이 α이므로
$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$
$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$
$k=0$ 또는 $\alpha=1$
$k=0$이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면
$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$
$\therefore\ 3k+\alpha=-1$

12. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$ ② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$ ④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x)-2 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1 \end{aligned}$$

13. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-$
$2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

14. $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore\ x = \dfrac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면

$3x^2-2x+7=0$

$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.

즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$

$3x^2-2x+7=0$ 이므로

$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3 = -11$

15. x의 방정식 $x^4-2(3k+1)x^2+7k^2+3k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k>0$ ② $k<0$ ③ $k>1$
④ $k<1$ ⑤ $0<k<1$

해설

$x^2=X$로 놓으면
$X^2-2(3k+1)X+7k^2+3k=0$
이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로
$\frac{D}{4}=(3k+1)^2-(7k^2+3k)>0$,
$\alpha+\beta=2(3k+1)>0,\ \alpha\beta=7k^2+3k>0$
$\therefore\ k>0$