

1. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가

x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$D = (k - 3)^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 9$$

2. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다.
이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned}y &= -2(x-1)^2 + 5 \\&= -2(x^2 - 2x + 1) + 5 \\&= -2x^2 + 4x + 3 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x + 3\end{aligned}$$

3. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때, $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $4a + b = -16$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $-a + b = -1$

$\therefore a = -3, b = -4$

$\therefore 2a - b = -2$

4. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$

x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=0$$

5. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + ax^2 + bx + 3 \\ &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c \\ \therefore & a = c, b = 1, c = 3 \\ & \text{따라서 } a = 3, b = 1 \end{aligned}$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax - a + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ 를 만족한다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 2

② 4

③ 0, 2

④ -4, 0

⑤ -4, 2

해설

$$\alpha + \beta = -a$$

$$\alpha\beta = -a + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 2(-a + 2) \\ &= a^2 + 2a - 4\end{aligned}$$

$$a^2 + 2a - 4 = 4, a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a + 4)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = -4, 2$$

7. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1

② 4

③ 9

④ 16

⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

8. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x \text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= \{x + (y + 2)\}\{2x - (y - 6)\} \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ \therefore & a = 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ \therefore & a + b + c + d = 8 \end{aligned}$$

9. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$

② $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

③ $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$

④ $\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$

⑤ $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 의 양변을 y^2 으로 나누면

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$\frac{x}{y} = t$ 라 하면 ($t > 0$)

$$2t^2 + t - 2 = 0$$

근의 공식에 대입하면

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad (t > 0) \quad \frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

10. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?



① 65

② 66

③ 67

④ 68

⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로

양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$$

$$1 - \alpha^{n+1} = 0$$

$$\therefore \alpha^{n+1} = 1$$

한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로

$$\alpha^6 = 1$$

$$\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.

11. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이
단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인
상수)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로

$$3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$$

$$3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$

$$k = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1$$

$k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면

$$3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore 3k + \alpha = -1$$

12. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이다. 다항식 $xf(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x) - 2, -1$

② $2xQ(x) - 1, -1$

③ $\frac{1}{2}xQ(x) - 2, 1$

④ $\frac{1}{2}xQ(x) - 1, 1$

⑤ $\frac{1}{2}xQ(x) + 1, 2$

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2Q(x) - 2$$

$$xf(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2x$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\{2xQ(x) - 2\} - 1$$

13. 세 변의 길이가 x, y, z 인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① $z = x$ 인 이등변삼각형, 또는 y 가 빗변인 직각삼각형

② $y = z$ 인 이등변삼각형, 또는 x 가 빗변인 직각삼각형

③ x 가 빗변인 직각삼각형

④ y 가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x = y$ 인 이등변 삼각형, 또는 z 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & (x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)(x + y)^2(x^2 + y^2) - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)\{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2)z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xyz^2 - 2y^2z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)\{(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) = 0 \\
 &\therefore x = y \text{인 이등변 삼각형 또는 } z \text{가 빗변인 직각 삼각형} \\
 &(\because x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 \text{에서 삼각형의 변인 } x, y, z \text{는 } x + y \neq z)
 \end{aligned}$$

14. $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$ 이라 할 때, $3x^3 + 4x^2 + 3x + 3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7

② -8

③ -9

④ -10

⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}i}{\frac{-1 - \sqrt{5}i}{2}} = \frac{3 - \sqrt{5}i}{-1 - \sqrt{5}i}$$

$$\therefore x = \frac{1 + 2\sqrt{5}i}{3} \quad 3x - 1 = (3x - 1 = 2\sqrt{5}i), \text{ 양변을 제곱해서}$$

정리하면

$$3x^2 - 2x + 7 = 0$$

$3x^3 + 4x^2 + 3x + 3$ 를 $3x^2 - 2x + 7$ 로 나누면 몫이 $x + 2$, 나머지가 -11 이다.

$$\text{즉, } 3x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = (3x^2 - 2x + 7)(x + 2) - 11$$

$$3x^2 - 2x + 7 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore 3x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = -11$$

15. x 의 방정식 $x^4 - 2(3k + 1)x^2 + 7k^2 + 3k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k > 0$

② $k < 0$

③ $k > 1$

④ $k < 1$

⑤ $0 < k < 1$

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 - 2(3k + 1)X + 7k^2 + 3k = 0$$

이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로

$$\frac{D}{4} = (3k + 1)^2 - (7k^2 + 3k) > 0,$$

$$\alpha + \beta = 2(3k + 1) > 0, \quad \alpha\beta = 7k^2 + 3k > 0$$

$$\therefore k > 0$$