

1. 이차방정식 $x^2 - 7x + 2 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, $ab(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned}(x - a)(x - b) &= 0 \\ x^2 - (a + b)x + ab &= 0 \\ a + b &= 7, \quad ab = 2 \\ \therefore ab(a + b) &= 14\end{aligned}$$

2. 이차방정식 $2x^2 + 4ax - 3a - 4 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 다른 한 근을 구하면?

- ① $-\frac{2}{7}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{11}{7}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$2 \times (-1)^2 + 4a \times (-1) - 3a - 4 = 0$$

$$2 - 4a - 3a - 4 = 0, a = -\frac{2}{7}$$

$$2x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{6}{7} - 4 = 0, 7x^2 - 4x - 11 = 0$$

$$(7x - 11)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{11}{7} \text{ 또는 } x = -1$$

3. 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$ 이 중근을 갖기 위한 a 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

중근을 가지려면 $x^2+ax+a-1$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore \left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = a-1, \frac{a^2}{4} = a-1$$

$$a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

4. 이차방정식 $3(x+3)^2 = 6$ 의 해가 $x = A \pm \sqrt{B}$ 일 때, $A+B$ 의 값은?
(단, A, B 는 유리수)

① 5

② 3

③ 1

④ -1

⑤ -3

해설

$$(x+3)^2 = 2$$

$$x+3 = \pm \sqrt{2}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$A = -3, B = 2$$

$$\therefore A+B = -1$$

5. 이차방정식 $(x-1)(x-5) = 4$ 를 $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 고칠 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}(x-1)(x-5) &= 4 \\ x^2 - 6x + 5 &= 4 \\ (x-3)^2 - 9 + 5 &= 4 \\ \therefore (x-3)^2 &= 8 \\ a &= -3, b = 8 \\ \therefore a+b &= 5\end{aligned}$$

6. x 의 값의 범위가 $0 \leq x < 3$ 일 때, 이차방정식 $3x^2 - 10x + 3 = 0$ 을 만족시키는 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{1}{3}$

해설

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3$$

x 의 값의 범위가 $0 \leq x < 3$ 이므로 $x = \frac{1}{3}$ 이다.

7. 이차방정식 $2x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 1, 2일 때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② -2

③ 2

④ 10

⑤ -10

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $2 + a + b = 0$

$x = 2$ 를 대입하면 $8 + 2a + b = 0$

두 방정식을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 4$

$\therefore a - b = -10$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 해가 $x = 2$ 또는 $x = -3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ -6 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에

$x = 2$ 를 대입하면 $4 + 2a + b = 0 \cdots \textcircled{㉠}$

$x = -3$ 을 대입하면 $9 - 3a + b = 0 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 를 연립하여 풀면 $a = 1, b = -6$

$\therefore a + b = -5$

9. 이차방정식 $x^2 + 3x - 10 + b = 0$ 의 한 근이 2 일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned}x &= 2 \text{ 일 때, } b = 0 \\x^2 + 3x - 10 &= 0 \\(x + 5)(x - 2) &= 0 \\\therefore x &= -5 \text{ 또는 } x = 2\end{aligned}$$

10. 이차방정식 $x^2 + ax - 6 = 0$ 의 해가 3, b 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x^2 + ax - 6 = 0$ 에 $x = 3$ 을 대입하면

$9 + 3a - 6 = 0, a = -1$

$a = -1$ 을 $x^2 + ax - 6 = 0$ 에 대입하면

$x^2 - x - 6 = 0$ 이고, 인수분해하면 $(x + 2)(x - 3) = 0$ 이므로

$x = 3, -2$

$b = -2$

따라서 $a + b = (-1) + (-2) = -3$

11. 두 이차방정식 $2x^2 - 7x - 4 = 0$, $2x^2 - 5x - 12 = 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 4) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 동시에 만족하는 x 의 값은 4이다.

12. 다음 이차방정식 중 중근을 갖지 않는 것을 모두 고르면?

① $x^2 - 1 = 0$

② $x^2 = 12x - 36$

③ $2(x+4)^2 = 8$

④ $x^2 = 6(x - \frac{3}{2})$

⑤ $1 - \frac{1}{3}x^2 = 2(x+2)$

해설

① $x^2 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$

③ $2(x+4)^2 = 8$ 에서 $x^2 + 8x + 12 = 0$, $(x+2)(x+6) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = -6$

13. 이차방정식 $x^2 + mx + 2m + 12 = 0$ 이 중근을 갖도록 m 의 값을 정하고, 이때의 중근을 구하여라. (단, $m > 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 12$

▷ 정답 : $x = -6$

해설

$x^2 + mx + 2m + 12 = 0$ 이 중근을 가지려면

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = 2m + 12$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$(m - 12)(m + 4) = 0$$

$$m = 12 (\because m > 0)$$

$$x^2 + 12x + 2 \times 12 + 12 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 0$$

$$\therefore x = -6(\text{중근})$$

14. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{7}{2}$
- ③ $\frac{9}{2}$
- ④ $\frac{11}{2}$
- ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$ 를 정리하면,
 $(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$
이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.
따라서 $a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$
 $\therefore a = 8, b = 10, c = -\frac{3}{2}$
 $a + b + c = \frac{33}{2}$ 이다.

15. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① 61 ② 51 ③ 11 ④ -11 ⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

16. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 일 때, $a^2 + \frac{4}{a^2}$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 15 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x = a$ 를 주어진 이차방정식에 대입하면 $a^2 - 4a + 2 = 0$

양변을 a 로 나누면 $a - 4 + \frac{2}{a} = 0$ 이므로 $a + \frac{2}{a} = 4$

$$\therefore a^2 + \frac{4}{a^2} = \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$$

17. 다음 중 $(a-2)(b+1)=0$ 을 만족하는 a, b 를 모두 고른 것은?

$\text{㉠ } a=2, b=1$	$\text{㉡ } a=3, b=1$
$\text{㉢ } a=1, b=-1$	$\text{㉣ } a=2, b=-1$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉣
- ④ ㉠, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$a-2=0$ 또는 $b+1=0$
 $a=2$ 또는 $b=-1$
따라서 ㉠, ㉢, ㉣이다.

18. x 에 대한 이차방정식 $(m+1)x^2 + (m^2+3m-4)x - 8 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 곱이 $-\frac{a}{b}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=29$

해설

한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$4(m+1) + 2(m^2+3m-4) - 8 = 0$$

$$2m^2 + 10m - 12 = 0$$

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$(m+6)(m-1) = 0$$

$$m = -6 \text{ 또는 } m = 1$$

i) $m=1$ 일 때,

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ } (-2 < 0 \text{ 이므로 부적합})$$

ii) $m=-6$ 일 때,

$$-5x^2 + 14x - 8 = 0$$

$$5x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$(x-2)(5x-4) = 0$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = \frac{4}{5} \text{ (두 근이 모두 양수이므로 적합)}$$

따라서 $m=-6$ 이고, 다른 한 근은 $\frac{4}{5}$ 이므로 $-6 \times \frac{5}{4} = -\frac{24}{5}$

$$\therefore a=24, b=5$$

$$\therefore a+b=15+2=29$$

19. 세 이차방정식 $x^2+8x+12=0$ 과 $2x^2+9x-18=0$, $2x^2+4mx-12m=0$ 이 공통근을 가질 때, m 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^2+8x+12=0 \rightarrow (x+6)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-6, -2$$

$$2x^2+9x-18=0 \rightarrow (x+6)(2x-3)=0$$

$$\therefore x=-6, \frac{3}{2}$$

이므로 두 방정식의 공통근은 $x=-6$ 이다.

따라서 이차방정식 $2x^2+4mx-12m=0$ 도

근으로 -6 을 가지므로 $x=-6$ 을 대입하면

$$2 \times (-6)^2 + 4 \times (-6)m - 12m = 0$$

$$36m = 72$$

$$\therefore m = 2$$

20. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때, mn 의 값은?

- ① 21 ② -21 ③ 27 ④ -27 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x^2 - 6x) &= -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m \\ \frac{1}{3}(x - 3)^2 &= -m + 3 \\ \therefore m &= 9, n = -3 \\ \therefore mn &= -27\end{aligned}$$

21. 이차방정식 $x^2 + 4ax + b = 0$ 의 근이 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 7$

해설

$x^2 + 4ax + b = 0$ 에서

$$x^2 + 4ax = -b$$

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = -b + 4a^2$$

$$(x + 2a)^2 = -b + 4a^2$$

$$x + 2a = \pm \sqrt{4a^2 - b}$$

$$\therefore x = -2a \pm \sqrt{4a^2 - b} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 $a = -1$, a 값을 대입하면

$$\sqrt{4 - b} = \sqrt{12}$$

$$\therefore b = -8$$

따라서 $a - b = 7$ 이다.

22. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?
- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
 - ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
 - ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
 - ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
 - ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$
$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개
 $k = 3$: 근이 1개
 $3 < k$: 근이 2개

23. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0, A = -8\end{aligned}$$

24. $a^2x + 2ax - 8x = a + 4$ 를 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a^2x + 2ax - 8x = a + 4$$

$$(a^2 + 2a - 8)x = a + 4$$

해가 없을 때이므로

$$a^2 + 2a - 8 = 0, a + 4 \neq 0 \text{ 이다.}$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0, (a + 4)(a - 2) = 0$$

$$a + 4 \neq 0 \text{ 이므로 } a - 2 = 0, a = 2 \text{ 이다.}$$

25. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80)$ 이다.
 k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ k &= f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80) \\ &= \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50} \\ &\quad + \cdots + \sqrt{81} - \sqrt{80} \\ &= -\sqrt{49} + \sqrt{81} \\ &= -7 + 9 = 2 \\ (a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) &= 0 \text{ 에 } x=2 \text{ 를 대입하면} \\ 4a + 20 + 2a^2 - 4 + 4a - 8 &= 0 \\ 2a^2 + 8a + 8 &= 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0 \\ (a+2)^2 &= 0 \quad \therefore a = -2 \\ a = -2 \text{ 를 식에 대입하면} \\ 3x^2 + 2x - 16 &= 0, \quad (x-2)(3x+8) = 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ 또는 } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

26. $\frac{y}{x} \geq 0$ 인 x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 - 5xy - 14y^2 = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{y^2 + y + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 5xy - 14y^2 = 0$ 의 양변을 y^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{5x}{y} - 14 = 0$$

$\frac{x}{y} = t$ 라고 놓으면

$$t^2 - 5t - 14 = 0, (t + 2)(t - 7) = 0$$

$$\therefore t = 7 \left(\because \frac{y}{x} \geq 0 \right)$$

$\frac{x}{y} = 7, x = 7y$ 를 $x^2 - 5xy - 14y^2 = 0$ 에 대입하면

$$(7y)^2 - 5(7y)y - 14y^2 = 0$$

$$\therefore y = 0, x = 0$$

$$\therefore \frac{x^2 - x + 1}{y^2 + y + 1} = 1$$

27. 세 개의 이차방정식 $x^2 - (1 + p)x + p = 0$, $x^2 - (q - 1)x - q = 0$, $x^2 - 2(p + 2q)x + 8pq = 0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖는다. 세 개의 이차방정식의 공통근이 음수일 때, $p - 4q - 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - (1 + p)x + p = 0$, $x = 1, x = p \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $x^2 - (q - 1)x - q = 0$, $x = -1, x = q \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $x^2 - 2(p + 2q)x + 8pq = 0$, $x = 2p, x = 4q \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
세 개의 이차방정식의 공통근이 음수이므로,
 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에서 공통근은 $x = p$
 $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $2p \neq p$ 이므로 공통근은 $x = 4q$
 $\textcircled{\text{㉢}}$ 에서 $q \neq 4q$ 이므로 공통근은 $x = -1$
 $\therefore p = 4q = -1, \quad p - 4q = 0$
 $\therefore p - 4q - 1 = -1$

28. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

㉠ $3x + 5 = m + 1$

㉡ $3x^2 + 2x - 9 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\textcircled{2} \quad 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$$\textcircled{1} \quad 3x + 5 = m + 1$$

$$\therefore x = \frac{m - 4}{3}$$

$$\frac{-1 - 2\sqrt{7}}{3} < \frac{m - 4}{3} < \frac{-1 + 2\sqrt{7}}{3}$$

$$-1 - 2\sqrt{7} < m - 4 < -1 + 2\sqrt{7}$$

$$3 - 2\sqrt{7} < m < 3 + 2\sqrt{7}$$

정수 m 의 최솟값은 -2 , 최댓값은 8 이다.

$$\therefore -2 + 8 = 6$$

29. $x^2 + ax + b = 0$ 에서 계수 a, b 를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a , 두 번째의 수를 b 라 한다. 이 때, 이 이차 방정식이 중근을 가지는 확률은?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{6}$
- ④ $\frac{1}{9}$
- ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2 + ax + b = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b$ 이다.

$a^2 = 4b$ 를 만족하는 (a, b) 를 구하면 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ 의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

30. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

① $24 + 5\sqrt{21}$

② $26 + 6\sqrt{23}$

③ $28 + 7\sqrt{26}$

④ $32 + 8\sqrt{23}$

⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면

$$x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 22$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{22}$$

α 는 양의 근이므로 $\alpha = 2 + \sqrt{22}$

$$\therefore \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$$