1. 다음 등식 중에서 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)(x+2)=x^2-4$　② $x^2-x=x(x+2)$

③ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$　④ $x(x-2)=0$

⑤ $x+y=x-y$

해설

②는 $x=0$일 때만 성립하고,
④는 $x=0, 2$일 때만 성립한다.
그리고 ⑤는 $y=0$일 때만 성립한다.
①과 ③은 모든 실수에 대하여 성립한다.

2. 복소수 z 를 원소로 하는 집합 $M = \{z \mid z = (x+y) + (x-y)i,\ x,\ y$는 양의 실수 $\}$일 때, 다음 중 M 의 원소인 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-3-2i$ ② $-1+2i$ ③ $2+3i$
④ $3+4i$ ⑤ $5+2i$

해설

복소수 $z = (x+y) + (x-y)i$ 에서 $x > 0,\ y > 0$ 인 실수이므로
$x+y > 0$ 이고 $x+y > x-y$
따라서 (실수 부분)> 0, (실수 부분)>(허수 부분) 이다.
이를 만족시키는 복소수는 ⑤$5+2i$ 이다.

3. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$\dfrac{2+3i}{1-i} = \dfrac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+5i}{2}$

$\therefore\ a+b = \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{5}{2} = 2$

4. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot (k-1)\ge 0$

$9+4k-4\ge 0,\ 4k\ge -5$

$\therefore\ k\ge -\dfrac{5}{4}$

5. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = 1$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 27 - 9 = 18$

6. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

7. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

8. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

9. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

10. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}=a+1=2000$$

11. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　　② $-2x+1$　　③ 3

④ -3　　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

12. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

13. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$
② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$
④ $y = -x^2 - 2x + 1$
⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

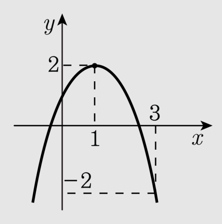
14. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



15. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 14　　⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

16. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

17. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$　② $3x-4$　③ $4x-5$
④ $5x+6$　⑤ $6x-7$

해설

$f(x)=(x-2)\,Q_1(x)+3,\ f(2)=3$
$f(x)=(x-3)\,Q_2(x)+7,\ f(3)=7$
$f(x)=(x-2)(x-3)\,Q_3(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3, f(3)=3a+b=7$ 이다.
연립하면 $a=4,\ b=-5$
$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

18. 임의의 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $*$를 $A*B=A^2+B^2-A-B$ 라 할 때, 다음 중 $(x+1)*X=2(x+1)^2$을 만족하는 다항식 X는?

① $x-1$ ② $x+2$ ③ $2(x-2)$
④ $2(x+3)$ ⑤ $(x+1)(x-2)$

해설

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.
$x^2+x+X^2-X=2x^2+4x+2$
$X^2-X=x^2+3x+2$,
$[X-(x+2)][X+(x+1)]$
따라서 $X=x+2$ 또는 $X=-x-1$

19. 이차항의 계수가 모두 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $(x+1)(x-2)(x-3)$인 두 이차식을 구하면?

① $(x+1)(x-2),\ (x-2)(x-3)$
② $(x+1)(x-2)(x-3),\ (x-2)$
③ $(x+1)^2,\ (x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x-3),\ (x-2)(x-3)$
⑤ $(x+1)(x-2),\ (x+1)(x-3)$

해설
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수는 $(x-2)ab=(x+1)(x-2)(x-3)$
$a=x+1,\ b=x-3$ (또는 $a=x-3,\ b=x+1$)
따라서 두 다항식은 $(x-2)(x+1),\ \ (x-2)(x-3)$

20. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\left\{x-(1+i)\right\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

21. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

22. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\frac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a,b,c는 실수)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{1+2i-1}=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\frac{1}{2}i$이면

a,b,c가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α,β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

23. x에 관한 방정식 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$ 에서 두 근의 절댓값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

① ab ② $\dfrac{a+b}{a-b}$ ③ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$(m+1)(x^2-bx)=(m-1)(ax-c)$

$mx^2-bmx+x^2-bx=amx-cm-ax+c$

$(m+1)x^2+(a-b-am-bm)x+cm-c=0$ 의 두 근을 α,β라고 하면,

$\alpha+\beta=0$

$\therefore \dfrac{a-b-am-bm}{m+1}=0,\quad am+bm=a-b$

$m(a+b)=a-b,\ a\neq -b$이므로 $a+b\neq 0$

$\therefore m=\dfrac{a-b}{a+b}$

24. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　② $-\frac{3}{8}$　③ $\frac{3}{8}$　④ 3　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x-2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$

$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$i)\ a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$ii) a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

25. $x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 이므로

$y=-x+3\geq 0 \ \rightarrow \ -x\geq -3 \ \rightarrow \ x\leq 3 \therefore \ 0\leq x\leq 3 \ (\because \ x\geq 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 $18 \therefore M-m=12$