1. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

2. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i) \\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

4. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

5. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

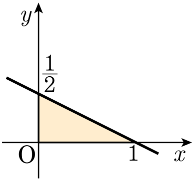
$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)\,i=0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



6. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

7. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

8. $|x-y|+(y-2)i = 5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$$(x-y)+(y-2)i = 5x-2-3xi$$

$$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$$

$$\therefore\ x=0,\ y=2(x<y\text{이므로 부적합})$$

(ii) $x<y$일 때.

$$-(x-y)+(y-2)i = 5x-2-3xi$$

$$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$$

$$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$$

9. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3 개

10. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy\text{의 최댓값}) = 4$

11. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore \ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y<x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore \ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore \ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

12. 복소수 $z = 1 + 4i$일 때, $\overline{x(2-i)} + y(1-i) = \bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$z = 1 + 4i$이므로 $\bar{z} = 1 - 4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)} + y(1-i) &= \bar{x}(\overline{2-i}) + y(1-i) \\ &= x(2+i) + y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i) + y(1-i) = 1 - 4i$

$(2x+y) + (x-y)i = 1 - 4i$

복소수가 서로 같을 조건에서

$2x + y = 1,\ x - y = -4$

위 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1,\ y = 3$

$\therefore\ x + y = 2$

13. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0,\ \therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3},\ \beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

14. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 300 ② 303 ③ 305 ④ 308 ⑤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개 , $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$= 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$

$= a - b + \sqrt{2}i\,(c - d) = 0$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a - b, c - d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b,\ c = d \cdots$ ①

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

$= 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$

$= a + b - 2c - 2d = (a + b) - 2(c + d) = 0$

$a + b = 2(c + d)$

$2a = 4c(\because$ ①$)$

$\therefore\ a = 2c$

$\therefore\ a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$

$\therefore\ n = a + b + c + d = 6a$, n 은 6 의 배수

15. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

16. $z \cdot \bar{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 z_1, z_2 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ 는 각각 z_1, z_2 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
(a, b, c, d 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2, \; b + d = 0$
㉠ $-$ ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore \; a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

17. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$　　② $-i$　　③ $2i$　　④ i　　⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

18. $x = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$　　② -1　　③ $-i$

④ 1　　⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2006} + x^{2007}$

$= 0 + 0 + \cdots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$

$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$

$= -i - 1 + i$

$= -1$

19. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i \ , \ i^4 = 1$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} \\ &= ((i)^4)^{12} \cdot i^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

20. $a=1+i$, $b=1-i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2=(1+i)^2=2i,\ b^2=(1-i)^2=-2i$,

$ab=(1+i)(1-i)=2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}\\ &= \frac{-2i+2+2i}{4}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

21. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha\overline{\alpha}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{i}{3}$ ② i ③ $-i$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha\overline{\alpha}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

22. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha*\beta=(\alpha+\beta)-\alpha\beta$ 라 하자. $z=\dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z*\bar{z}$ 의 값은?

① -1　② 1　③ -9　④ 9　⑤ 0

해설

$z=-2+i$, $\bar{z}=-2-i$

$$\begin{aligned} z*\bar{z} &= (z+\bar{z})-z\bar{z} \\ &= -4-5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

23. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i}$$

$$= -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$$

$$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

24. 두 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)}$ 이 성립할 때, $|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2x-6$ ② $-2x-2y$ ③ 0

④ $2y-6$ ⑤ $2x+2y$

해설

$\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)}$ 에서

$x+3 \leq 0,\ y-3 \leq 0 \rightarrow x+y \leq 0$

$|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$

$= |x+3| - |y-3| + |x+y|$

$= -(x+3) + (y-3) - (x+y)$

$= -x-3+y-3-x-y$

$= -2x-6$

25. $\sqrt{-2}\,\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\,\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1+4i$ ② $2+4i$ ③ $-2+4i$

④ $-2+i$ ⑤ $-2-4i$

해설

$$\sqrt{-2}\,\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\,\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+2\cdot 2i+\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}=-2-i+4i+i=-2+4i$$

26. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.

③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\dfrac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

27. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
>
> ㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
>
> ㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$

$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는

실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.

㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$

$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

28. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\overline{z}$	㉡ $z\overline{z}$	㉢ $(z-\overline{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$	㉤ $\frac{\overline{z}}{z}$	

① ㉠
② ㉠ ,㉡
③ ㉠ ,㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣
⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z = a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\overline{z} = a-bi$

㉠ $z+\overline{z} = 2a$

㉡ $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

㉢ $(z-\overline{z})^2 = (2bi)^2 = -4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} - \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\overline{z}}{z} = \frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

29. 복소수 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$=\left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$$

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4=0$

$\rightarrow z^2+z+1=0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\rightarrow z^3-1=0$

$\rightarrow z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=10z^4+12x^3+10z^2$

$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$=0+2$

$=2$

30. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠ ② ㉠ , ㉡ ③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢ ⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\bar{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\bar{\alpha}=-1, \alpha\bar{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\bar{\alpha}+3}{2\bar{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\bar{\alpha}+3(\alpha+\bar{\alpha})+9}{4\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

31. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots ①$, $y^2 - x = i \cdots ②$ 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

32. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 $x,\ y$ 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로

직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.

따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1,\ \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1},\ \bar{z} = \dfrac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\
&= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\
&= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\
&= \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

33. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}$

해설

$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 에서 $2x + 1 = \sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + x + 1 = 0 \;\therefore\; x + \frac{1}{x} = -1$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{(준식)} &= x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x - 1}} \\
&= x + \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} \\
&= x + \frac{x - 1}{-2x} \\
&= \frac{-2x^2 + x - 1}{-2x} \\
&= \frac{-2(-x - 1) + x - 1}{-2x} \\
&= \frac{3x + 1}{-2x} \\
&= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2x} \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}i} \\
&= \frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}
\end{aligned}$$