1. 좌표평면 위의 점 $A(3, -2)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD 의 나머지 꼭짓점 D 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

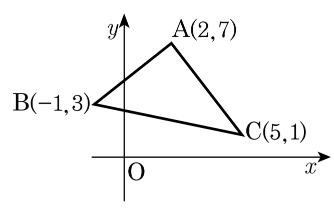
해설

□ABCD 는 평행사변형이므로
대각선 AC 의 중점과 대각선 BD 의 중점이 일치한다.
점 D 의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

$\therefore\ x = -2,\ y = -4$
따라서 점 D 의 좌표는 $(-2, -4)$

2. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

3. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

4. 원점에서 직선 $3x - 4y - 5 = 0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0 \times 3 + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

5. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0),\ (2, 6),\ (6, 3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$

6. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 1), B(3, 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(1, -2)$ ② $(0, -2)$ ③ $(1, 2)$
④ $(-1, 3)$ ⑤ $(2, 1)$

해설

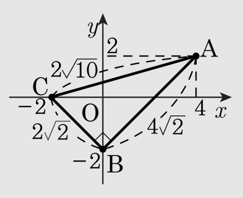
y축 위의 점을 $(0, \alpha)$라 하면
$(-2-0)^2 + (1-\alpha)^2 = (0-3)^2 + \alpha^2$
$\therefore\ \alpha = -2$

7. 세 점 A(4, 2), B(0, −2), C(−2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 △ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ ∠A = 90° 인 직각삼각형
④ ∠B = 90° 인 직각삼각형
⑤ ∠C = 90° 인 직각삼각형

해설

△ABC 의 세변의 길이를 구하면



$\overline{AB}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로
△ABC 는 ∠B = 90° 인 직각삼각형이다.

8. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 $\triangle\mathrm{ABM} = \triangle\mathrm{ACM}$일 때, $\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2$의 값은?

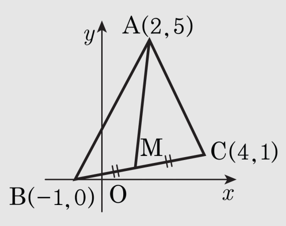
① 25　② 27　③ 29　④ 31　⑤ 33

해설

$\triangle\mathrm{ABM} = \triangle\mathrm{ACM}$이므로 $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{CM}}$이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2\right)$



$\therefore \overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2$

$= \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]$

$= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27$

9. 좌표평면 위에 점 O(0, 0), A(a, b), B(2, −1) 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

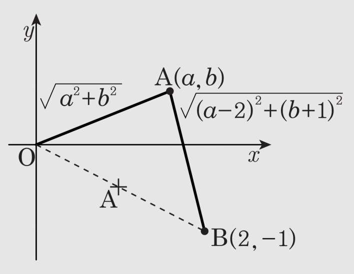
① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.

따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)

따라서, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$



10. 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로
직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.
또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times4-2\times1}{1-2},\ \frac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$
따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고
점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로
$y - 6 = 1\cdot(x+2)$, $y = x + 8$
$a = 1$, $b = 8$ $\quad\therefore a + b = 9$

11. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
$(-a)\cdot\frac{b}{3}=-1, \quad \therefore\ ab=3 \cdots$ ㉠
l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.
$-a=-b-2, \quad \therefore\ a-b=2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 이용하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4+6=10$

12. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$\dfrac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

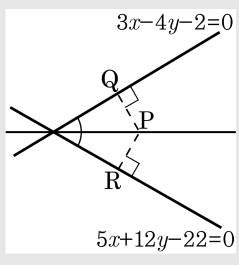
13. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

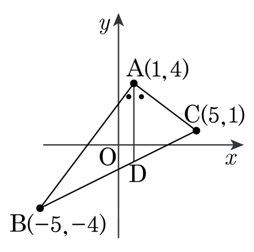
14. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$　　② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$　　④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,
$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$
$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면
$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$
$4X+2Y-3=0$
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

15. 다음 그림과 같이 세점 A$(1, 4)$, B$(-5, -4)$, C$(5, 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 가 있다. $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?



① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$

④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$
$\overline{AB} = \sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$
$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

16. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

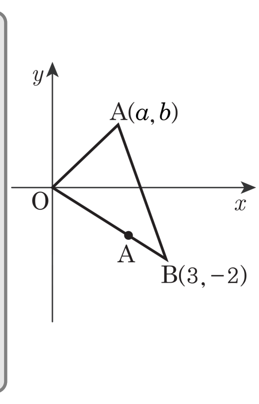
$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

17. 좌표평면 위에 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(a,\ b)$, B$(3, -2)$가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이이고
$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최솟값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$이다.



18. 직선 $x+y=1$은 두 점, A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2　② 2 : 3　③ 1 : 1　④ 2 : 1　⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

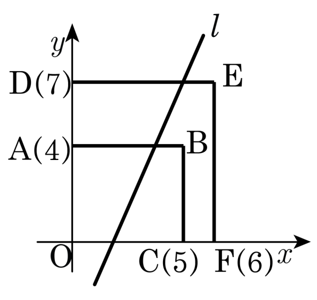
$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m : n = 1 : 2$

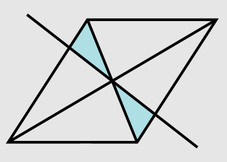
19. 아래 그림에서 직선 l이 두 직사각형 □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l : y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

□OABC의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

□ODEF의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$y = 3x - \frac{11}{2}$ $\therefore$ $a = 3, b = -\frac{11}{2}$

$\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

ⅰ)□OABC : $\frac{4}{2}((5 + \frac{b}{a}) + (5 - \frac{4b}{a})) = 10$

$\Rightarrow$ $2b - 4 + 5a = 0$

ⅱ)□ODEF : $\frac{7}{2}((6 + \frac{b}{a}) + (6 - \frac{7-b}{a})) = 21$

$\Rightarrow$ $6a + 2b - 7 = 0$

ⅰ)과 ⅱ)를 연립하면

$a = 3, b = -\frac{11}{2}$ $\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

20. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단,$a > 0,\ a \neq 1$)

$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$

① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각구하면,

$\Rightarrow \quad (0,0), \ \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

$a+1>0, \quad a-1>0 \quad \Rightarrow \quad a>1$

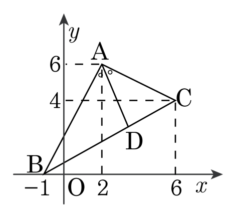
21. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$ 이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이 때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$　② $(0,0)$　③ $(0,1)$
④ $(1,0)$　⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$ 라고 하면
$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$ $\cdots$ ①
$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2$ $\cdots$ ②
$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$ $\cdots$ ③
$\overline{\mathrm{AP^2}}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$ 이므로
①, ② 연립하면 $a+3b=1$
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
$\therefore\ (1,\ 0)$
$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

22. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2,6)$, $B(-1,0)$, $C(6,4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



① $\left(2,\ \frac{6}{5}\right)$ ② $\left(\frac{12}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ ③ $\left(\frac{14}{5},\ 2\right)$
④ $\left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ ⑤ $\left(\frac{18}{5},\ \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC의 교점이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.
$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$,
$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$
따라서 점 D 는 선분 BC 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로
점 D 의 좌표는 $\left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$
$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$

23. 점 A$(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ 라 하면

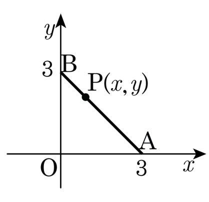
$x=\dfrac{a+3}{2},\quad y=\dfrac{-a+2}{2}$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

24. $b \geq a > 0,\ c \geq 0$ 이면 $\dfrac{a+c}{b+c} \geq \dfrac{a}{b}$ 가 성립한다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A$(3,\ 0)$, B$(0,\ 3)$ 에 대하여 점 P$(x,\ y)$ 가 선분 AB 위를 움직일 때, $\dfrac{5-y}{5+x} \times \dfrac{5-x}{5+y}$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

직선 AB 의 방정식은

$y = -x + 3$ 이므로 $x + y = 3$

$$\therefore \frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y} = \frac{25-5(x+y)+xy}{25+5(x+y)+xy}$$

$$= \frac{10+xy}{40+xy} \geq \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$(\because\ xy \geq 0)$

(단, 등호는 $xy = 0$ 일 때,

점 P가 A 또는 B일 때 성립한다.)

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

25. 좌표평면 위에서 $x^2+2xy+2y^2-4x-ky+5=0$이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k의 값을 구하면? (단, $k<5$)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

x에 관해서 정리하면, $x^2+2(y-2)x+2y^2-ky-5=0 \cdots$ ㉠
㉠이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로
$D/4=(y-2)^2-(2y^2-ky+5)$
$=-y^2+(k-4)y-1$이 완전제곱식이 되어야 한다.
$\therefore D=(k-4)^2-4=0$에서 $k=2$