

1. 좌표평면 위의 점 $A(3, -2)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 $ABCD$ 의 나머지 꼭짓점 D 의 좌표를 (x, y) 라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ $ABCD$ 는 평행사변형이므로

대각선 AC 의 중점과 대각선 BD 의 중점이 일치한다.

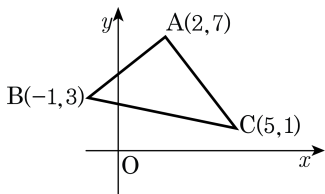
점 D 의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 3}{2} \right) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{5 + y}{2} \right)$$

$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D 의 좌표는 $(-2, -4)$

2. 세 점 $A(2, 7), B(-1, 3), C(5, 1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 다음 중 두 점 A, G 를 지나는 직선의 방정식은?



① $x - y - 2 = 0$

② $x + y - 2 = 0$

③ $x - 2 = 0$

④ $3x - y + 1 = 0$

⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G 를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
 점 A 와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$$

따라서, 두 점 $(2, 7)$ 과 $(2, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

3. $ac < 0$, $bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.



답 :

사분면



정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{7}$$

$ac < 0$, $bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 $\textcircled{7}$ 은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

4. 원점에서 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0 \times 3 + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

5. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0), (2, 6), (6, 3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

6. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 1), B(3, 0)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(0, -2)$

③ $(1, 2)$

④ $(-1, 3)$

⑤ $(2, 1)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면

$$(-2 - 0)^2 + (1 - \alpha)^2 = (0 - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha = -2$$

7. 세 점 A(4, 2), B(0, -2), C(-2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② 둔각삼각형

③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면

$\overline{AB}$

$$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

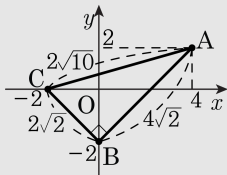
$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} =$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



8. 세 점 $A(2, 5)$, $B(-1, 0)$, $C(4, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서
 변 BC 위의 점 M 에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$ 일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$ 의
 값은?

① 25

② 27

③ 29

④ 31

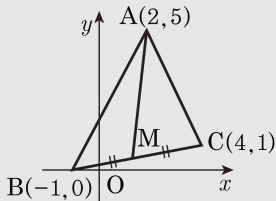
⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$ 이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$
 이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 &= \frac{1}{2} (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\} \right. \\ &\quad \left. + \{(4-2)^2 + (1-5)^2\} \right] \\ &= \frac{1}{2} (9 + 25 + 4 + 16) = 27 \end{aligned}$$



9. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때,
 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

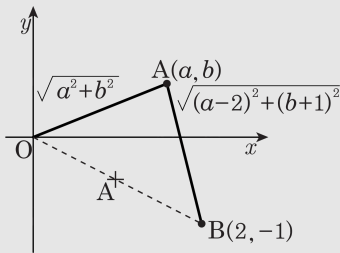
⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$
 의 길이이다.

따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)

따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



10. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right), \text{ 즉 } (-2, 6)$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$y - 6 = 1 \cdot (x + 2), \quad y = x + 8$$

$$a = 1, \quad b = 8 \quad \therefore a + b = 9$$

11. 세 직선 $l_1 : ax + y + 2 = 0$, $l_2 : bx - 3y - 3 = 0$, $l_3 : (b+2)x + y - 2 = 0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$(-a) \cdot \frac{b}{3} = -1, \quad \therefore ab = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.

$$-a = -b - 2, \quad \therefore a - b = 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 이용하면

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4 + 6 = 10$$

12. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

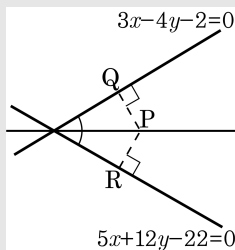
13. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

14. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x + 2y - 3 = 0$

② $2x + 3y + 1 = 0$

③ $4x - 3y + 1 = 0$

④ $x - 4y - 3 = 0$

⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

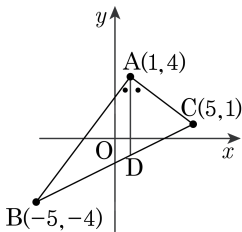
이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

15. 다음 그림과 같이 세점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① 1 : 1 ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ 2 : 1 ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$$

16. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $A(1, 0)$, $B(3, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표가 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 있는 점 P 는 $(\alpha, \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2, \alpha = 2$$

$$\therefore P(2, 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

17. 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(3, -2)$ 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $2\sqrt{3}$

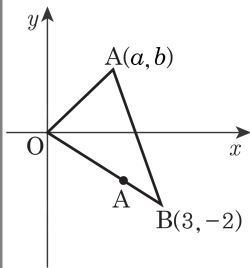
⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고
 $\sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.

따라서 준식은 세 점 O , A , B 가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며
 이 때 $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ 이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ 이다.



18. 직선 $x + y = 1$ 은 두 점, $A(-2, 0)$, $B(0, 7)$ 을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2

② 2 : 3

③ 1 : 1

④ 2 : 1

⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

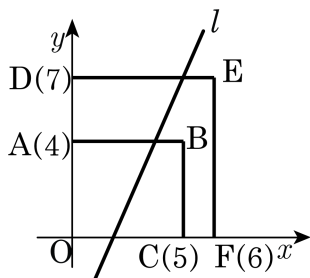
$$\left(\frac{m \cdot 0 + n \cdot (-2)}{m + n}, \frac{m \cdot 7 + n \cdot 0}{m + n} \right) = \left(\frac{-2n}{m + n}, \frac{7m}{m + n} \right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x + y = 1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m + n} + \frac{7m}{m + n} = 1, -2n + 7m = m + n, 2m = n$$

$$\therefore m : n = 1 : 2$$

19. 아래 그림에서 직선 l 이 두 직사각형 $\square OABC$ 와 $\square ODEF$ 의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l: y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

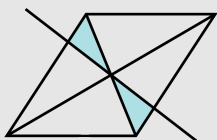
③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, $\square OABC$ 와 $\square ODEF$ 의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l 은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

$$\square OABC \text{의 중점} : \left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

$$\square ODEF \text{의 중점} : \left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$y = 3x - \frac{11}{2} \therefore a = 3, b = -\frac{11}{2}$$

$$\therefore a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right) \text{ 이다.}$$

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

$$\text{i) } \square OABC : \frac{4}{2} \left(\left(5 + \frac{b}{a}\right) + \left(5 - \frac{4b}{a}\right) \right) = 10$$

$$\Rightarrow 2b - 4 + 5a = 0$$

$$\text{ii) } \square ODEF : \frac{7}{2} \left(\left(6 + \frac{b}{a}\right) + \left(6 - \frac{7-b}{a}\right) \right) = 21$$

$$\Rightarrow 6a + 2b - 7 = 0$$

i)과 ii)를 연립하면

$$a = 3, b = -\frac{11}{2} \therefore a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$$

20. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$$

- ① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각 구하면,

$$\Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

$$a+1 > 0, \quad a-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$$

21. 좌표평면 위에 세 지점 $P(1, 5)$, $Q(-2, -4)$, $R(5, 3)$ 이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이 때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0, -1)$

② $(0, 0)$

③ $(0, 1)$

④ $(1, 0)$

⑤ $(1, 1)$

해설

$A(a, b)$ 라고 하면

$$(a-1)^2 + (b-5)^2 = \overline{AP}^2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$(a+2)^2 + (b+4)^2 = \overline{AQ}^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$(a-5)^2 + (b-3)^2 = \overline{AR}^2 \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AR}^2 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 연립하면 } a+3b=1$$

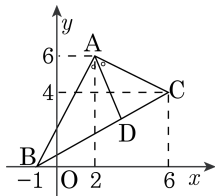
$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ 연립하면 } 2a-b=2$$

$$\therefore a=1, b=0$$

$$\therefore (1, 0)$$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

22. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2, 6)$, $B(-1, 0)$, $C(6, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



- ① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$ ② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ ③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$
 ④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$$

따라서 점 D 는 선분 BC 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } D \text{ 의 좌표는 } \left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

23. 점 A(3, -1) 과 직선 $x + y - 3 = 0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x + 2y - 5 = 0$

② $2x - 2y + 5 = 0$

③ $2x - y - 5 = 0$

④ $x + y - 5 = 0$

⑤ $2x + 2y - 5 = 0$

해설

$x + y - 3 = 0$ 위의 임의의 한 점을 P(a , $-a + 3$) 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 Q (x , y)라 하면

$$x = \frac{a+3}{2}, \quad y = \frac{-a+2}{2}$$

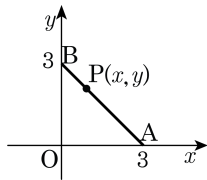
$$\therefore a = 2x - 3, \quad a = -2y + 2$$

$$\therefore 2x - 3 = -2y + 2$$

$$\therefore 2x + 2y - 5 = 0$$

24.

$b \geq a > 0, c \geq 0$ 이면 $\frac{a+c}{b+c} \geq \frac{a}{b}$ 가 성립한다.
 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A(3, 0), B(0, 3)에 대하여 점 P(x, y)가 선분 AB 위를 움직일 때, $\frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y}$ 의 최솟값은?



① $\frac{1}{5}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

직선 AB의 방정식은

$$y = -x + 3 \text{ 이므로 } x + y = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y} &= \frac{25 - 5(x+y) + xy}{25 + 5(x+y) + xy} \\ &= \frac{10 + xy}{40 + xy} \geq \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\because xy \geq 0)$$

(단, 등호는 $xy = 0$ 일 때,

점 P가 A 또는 B일 때 성립한다.)

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

25. 좌표평면 위에서 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - ky + 5 = 0$ 이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k 의 값을 구하면? (단, $k < 5$)

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

x 에 관해서 정리하면, $x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - ky - 5 = 0 \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{7}$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로

$$D/4 = (y-2)^2 - (2y^2 - ky + 5)$$

$= -y^2 + (k-4)y - 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore D = (k-4)^2 - 4 = 0 \text{에서 } k = 2$$